

ប្រឡងជ្រើសរើស សិស្សត្រកូល ទូទាំងរាជធានីភ្នំពេញ

ផ្នែកអក្សរសិល្ប៍ខ្មែរ គណិតវិទ្យា និងរូបវិទ្យា

ឆ្នាក់ទី៩ និងទី១២ ឆ្នាំសិក្សា ២០១២ - ២០១៥

សម័យប្រឡង ថ្ងៃទី ៥ - ៣ - ២០១៥

វិញ្ញាសា គណិតវិទ្យាឆ្នាក់ទី១២ (ថ្ងៃទី ៥ មីនា ២០១៥)

រយៈពេល៣ម៉ោង ពិន្ទុ១០០

១- ៥ពិន្ទុ ឧបមាថា  $m$  និង  $n$  ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន បឋមរវាងគ្នាដោយ  $A = \frac{m}{n}$  ដែល

$$A = \frac{2+4+6+\dots+2014}{1+3+5+\dots+2013} - \frac{1+3+5+\dots+2013}{2+4+6+\dots+2014} \quad \text{។ រកតម្លៃ } m \quad \text{។}$$

២- ៥ពិន្ទុ ស្រាយបញ្ជាក់ថាចំនួននីមួយៗ នៅក្នុងស្ក្រីត  $12, 1122, 111222, \dots$  ។

ជាផលគុណនៃពីរចំនួនគត់គ្នា ។

៣- ៥ពិន្ទុ ប្រៀបធៀបពីរចំនួន  $A = \frac{15^{2014} + 1}{15^{2015} + 1}$  និង  $B = \frac{15^{2015} + 1}{15^{2016} + 1}$  ។

៤- ៥ពិន្ទុ រកគ្រប់គូចំនួនគត់  $(x, y)$  ដែល  $6x^2 - 2xy - x + 3y = 22$  ។

៥- ១០ពិន្ទុ តាង  $a_1, a_2, \dots$  ជាស្ក្រីតកំណត់ដោយ  $a_1 = 1$  និងគ្រប់

$$n \geq 1, a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 - 2a_n + 3} + 1 \quad \text{។ រក } a_{2015} \quad \text{។}$$

៦- ១០ពិន្ទុ តាង  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$  ជាចំនួនពិតបំពេញទំនាក់ទំនង

$$2a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 1 + \frac{1}{8}a_1$$

គណិតវិទ្យាសម្រាប់ការសិក្សា

$$2a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 2 + \frac{1}{4}a_2$$

គណនា  $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$

$$2a_3 + a_4 + a_5 = 4 + \frac{1}{2}a_3$$

$$2a_4 + a_5 = 6 + a_4$$

៧- ១៥ពិន្ទុ ឧបមាថា  $f(0) = 1$  និង  $a > 0$  ជាចំនួនពិតដែលកំណត់។ បង្ហាញថា  $f(x) = 1$

ជាអនុគមន៍ជាប់តែមួយគត់នៃ  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ដែលបំពេញទំនាក់ទំនង

$$2f(x-y) = f(a-y)f(x) + f(a-x)f(y) \quad \text{ចំពោះគ្រប់ } x, y \in \mathbb{R} \quad \text{។}$$

៨- ១៥ពិន្ទុ ស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$2 \times 2017 \times (2017^3 + 1)(2016^3 + 1) \cdots (2^3 + 1) > 3 \times 2016 \times (2017^3 - 1)(2016^3 - 1) \cdots (2^3 - 1)$$

៩- ១៥ពិន្ទុ បើ  $x$  ជាចំនួនពិត និង  $k$  ជាចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាន គេតាង

$$\binom{x}{k} = \frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-k+1)}{k!} \quad \text{។ គណនាតម្លៃនៃ } A = \frac{\binom{\frac{1}{2}}{2015} \times 4^{2015}}{C(4030, 2015)}$$

១០- ១៥ពិន្ទុ ក្នុងត្រីកោណ  $ABC$  មាន  $AB = 7, BC = 8$  និង  $AC = 9$  ។ ចំណុច  $D$  នៅលើជ្រុង  $AC$  ដែល  $\angle CBD = 45^\circ$  ។ គណនាប្រវែង  $BD$  ។



[[[ការគណនា និង រកលក្ខណសម្បត្តិ]]]  
ផ្នែកទី 12 (ប្រូប៊ីលី)

① 5 ឆ្នាំ: កាកបាទ ៣

$$A = \frac{2+4+\dots+2014}{1+3+\dots+2013} - \frac{1+3+\dots+2013}{2+4+\dots+2014}$$

②  $\frac{m}{n} = \frac{\frac{1007}{2} \times 2016}{\frac{1007}{2} \times 2014} - \frac{\frac{1007}{2} \times 2014}{\frac{1007}{2} \times 2016}$

④  $= \frac{1008}{1007} - \frac{1007}{1008} = \frac{2015}{1007 \times 1008}$

ដោយ  $\gcd(2015, 1007) = 1$

④  $\gcd(2015, 1008) = 1$

④ ដូចនេះ:  $m = 2015$

② 5 ឆ្នាំ: (សរុបចំនួន 12, 1122, ...  
 ជាសរុបគណនា នៃចំនួនគត់តូច)

កាម  $a_1 = 12 = 3 \times 4$

$a_2 = 1122 = 33 \times 34$

①  $a_n = \frac{11 \dots 122 \dots 2}{n \quad n}$

④  $= \left(\frac{10^n - 1}{9}\right) 10^n + \frac{2}{9} (10^n - 1)$

④  $= \left(\frac{10^n - 1}{9}\right) (10^n + 2)$

④  $= \left(\frac{10^n - 1}{3}\right) \left(\frac{10^n - 1}{3} + 1\right)$

④  $= \frac{33 \dots 3 \times 33 \dots 34}{n \quad (n-1)}$

ដូចនេះ: (គ្រប់គ្នា នៃ ស៊េរី ជាសរុបគណនា  
 នៃ 2 ចំនួនគត់តូច) ។

គណិតវិទ្យាសម្រាប់ការសិក្សា

③ 5 ឆ្នាំ: (ប្រូប៊ីលី) ប្រូប៊ីលី 2 ចំនួន A និង B

$$A = \frac{15^{2014} + 1}{15^{2015} + 1} \text{ និង } B = \frac{15^{2015} + 1}{15^{2016} + 1}$$

កាម  $x = 15^{2014}$

①  $A - B = \frac{x+1}{15x+1} - \frac{15x+1}{15^2x+1}$

①  $= \frac{(x+1)(225x+1) - (15x+1)^2}{(15x+1)(225x+1)}$

①  $= \frac{226x+1 - 30x-1}{(15x+1)(225x+1)}$

①  $= \frac{196x}{(15x+1)(225x+1)} > 0$

④ ដូចនេះ:  $A > B$

④ 5 ឆ្នាំ: រក (គ្រប់គ្នា) ចំនួនគត់ (x, y)

សមីការ  $6x^2 - 2xy - x + 3y = 22$

$6x^2 - x - 22 = y(2x-3)$

$y = \frac{6x^2 - x - 22}{2x-3}$

$= \frac{(2x-3)(3x+4) - 10}{2x-3}$

①  $= 3x+4 - \frac{10}{2x-3}$

$x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow (2x-3) | 10$

$\Rightarrow (2x-3) \in \{-5, -1, 1, 5\}$

$x \in \{-1, 1, 2, 4\}$

ដូចនេះ:  $(x, y) = (-1, 3), (1, 17), (2, 0), (4, 4)$

④

10) 10 ឆ្នាំ: ឆ្នាំ 2015

មាន  $a_1 = 1$ ,  $a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 - 2a_n + 3} + 1$

①  $\Rightarrow (a_{n+1} - 1)^2 = a_n^2 - 2a_n + 1 + 2$

①  $(a_{n+1} - 1)^2 = (a_n - 1)^2 + 2$

① តាម  $u_n = (a_n - 1)^2$

①  $\Rightarrow u_{n+1} = u_n + 2$

①  $\Rightarrow (u_n)$  ជាជំរកស្រប

① ជាស្រប  $d = 2$  ដំបូងគឺ 1

①  $u_1 = (a_1 - 1)^2 = (1 - 1)^2 = 0$

①  $\Rightarrow u_n = u_1 + (n - 1)d$

①  $u_n = 2n - 2$

①  $\Rightarrow a_n = \sqrt{2n - 2} + 1$

$a_{2015} = \sqrt{4028} + 1$

①  $a_{2015} = 2\sqrt{1007} + 1$

⑥ 10 ឆ្នាំ: ឆ្នាំ 2015  $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$

មាន  $2a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 1 + \frac{1}{8}a_4$  (1)

$2a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 2 + \frac{1}{4}a_3$  (2)

$3a_3 + a_4 + a_5 = 4 + \frac{1}{2}a_2$  (3)

$2a_4 + a_5 = 6 + a_1$  (4)

កាល (1) ដើម 8, កាល (2) ដើម 4  
កាល (3) ដើម 2, កាល (4)

②  $16a_1 + 8a_2 + 8a_3 + 8a_4 + 8a_5 = 8 + a_4$

②  $8a_2 + 4a_3 + 4a_4 + 4a_5 = 8 + a_3$

②  $4a_3 + 2a_4 + 2a_5 = 8 + a_2$

$2a_4 + a_5 = 6 + a_1$

② បញ្ជាក់:  $16(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) + 15a_5 = 30 + (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)$

②  $15(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5) = 30$

② ដូច្នោះ:  $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 2$

④ 15 ឆ្នាំ: បញ្ជាក់  $f(x) = 1$  គឺជា  
ចំណុចស្រប

មាន  $f(0) = 1, 2f(x-y) = f(a-x)f(x) + f(a-x)f(y)$

② a)  $x = y$ :  $f(0) = f(a-x)f(x) + f(a-x)f(x)$  (1)

② គ:  $x = 0 \Rightarrow f(a) = 1$

ឲ្យ  $y = 0$  ក្នុង (1):

②  $2f(x) = f(a)f(x) + f(a-x)f(0)$

②  $2f(x) = f(x) + f(a-x)$

②  $f(x) = f(a-x)$  (2)

② (1) និង (2)  $f(0) = f(a) = 1$

$\Rightarrow f(x) = \pm 1$  (គ្រប់  $x \in \mathbb{R}$ )

② ដោយសារ  $f(0) = 1$

② ដូច្នោះ:  $f(x) = 1$  គឺជាចំណុចស្រប



15 terms:  $(k^3+1)$

$$2 \times 2017 (2017^3+1)(2016^3+1) \dots (2^3+1) >$$

$$3 \times 2016 (2017^3-1)(2016^3-1) \dots (2^3-1)$$

① then  $A = 2 \times 2017 \prod_{k=2}^{2017} (k^3+1)$

①  $B = 3 \times 2016 \prod_{k=2}^{2017} (k^3-1)$

① simplify  $\frac{k^3-1}{k^3+1} = \frac{(k-1)(k^2+k+1)}{(k+1)(k^2-k+1)}$

① then  $P(k) = k^2+k+1$

①  $P(k-1) = (k-1)^2+(k-1)+1 = k^2-k+1$

①  $\Rightarrow \prod_{k=2}^{2017} \left( \frac{k^3-1}{k^3+1} \right)$

คณิตศาสตร์สากล

①  $= \prod_{k=2}^{2017} \frac{(k-1)}{(k+1)} \cdot \frac{P(k)}{P(k-1)}$

①  $= \frac{2016!}{2018!} \times 2 \cdot \frac{P(2017)}{P(1)}$

①  $= \frac{2}{2017 \times 2018} \times \frac{2017^2+2017+1}{3}$

①  $= \frac{2}{3} \left( \frac{2017 \times 2018 + 1}{2017 \times 2018} \right)$

①  $= \frac{2}{3} \left( 1 + \frac{1}{2017 \times 2018} \right)$

①  $< \frac{2}{3} \left( 1 + \frac{1}{2016} \right)$

①  $= \frac{2 \times 2017}{3 \times 2016}$

Proofs:  $\prod_{k=2}^{2017} (k^3-1) < \frac{2 \times 2017}{3 \times 2016}$

①  $\square A > B$

⑨ 15 terms:  $\frac{C(2015, k)}{C(2015, 2015-k)}$

then  $\binom{x}{k} = \frac{x(x-1)(x-2)\dots(x-k+1)}{k!}$

① then  $k = 2015$

①  $\binom{\frac{1}{2}}{2015} = \binom{\frac{1}{2}}{k} = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)\dots(\frac{1}{2}-k+1)}{k!}$

①  $= \frac{1(1-2)(1-4)\dots(1-2(k-1))}{k! 2^k}$

①  $= \frac{(-1)^{k-1} [1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2k-3)]}{k! 2^k}$

①  $= \frac{(-1)^{k-1} [(2k-2)!]}{k! 2^k \cdot (k-1)!}$

①  $\binom{\frac{1}{2}}{k} = \frac{2(-1)^{k-1} (2k-2)!}{k! 4^k (k-1)!}$  (1)

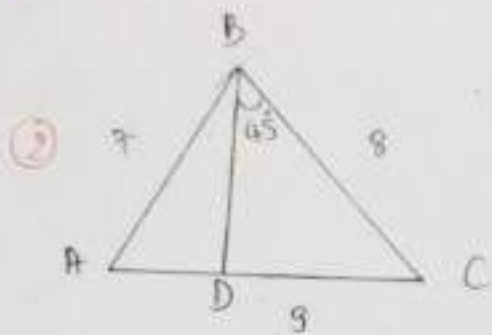
① then  $C(2k, k) = \frac{(2k)!}{(k!)(k!)}$  (2)

①  $\frac{\binom{\frac{1}{2}}{k}}{C(2k, k)} = \frac{2(-1)^{k-1} (2k-2)! \cdot k! \cdot k!}{k! \cdot 4^k (k-1)! \cdot (2k)!}$

①  $\Rightarrow \frac{\binom{\frac{1}{2}}{k} 4^k}{C(2k, k)} = \frac{2(-1)^{k-1} \cdot k}{(2k-1)(2k)}$

$k=2015 \Rightarrow \square A = \frac{1}{4029}$

③



⑩ 15 វិនាទី: គណនា (ប្រវែង BD)

តាមទ្រឹស្តីបទ COS ក្នុង  $\Delta ABC$

$$\textcircled{2} \cos C = \frac{8^2 + 9^2 - 7^2}{2 \times 8 \times 9} = \frac{96}{2 \times 8 \times 9} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C} = \sqrt{1 - \frac{4}{9}}$$

$$\textcircled{2} \sin C = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

① ក្នុង  $\Delta BDC$ :  $\angle BDC = 180^\circ - 45^\circ - C$

$$\textcircled{1} \Rightarrow \sin \angle BDC = \sin(45^\circ + C)$$

$$\textcircled{1} = \sin 45^\circ \cos C + \sin C \cos 45^\circ$$

$$\textcircled{1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{5}}{3} \right)$$

$$\sin \angle BDC = \frac{2\sqrt{2} + \sqrt{10}}{6}$$

④

គណិតវិទ្យាសម្រាប់ការសិក្សា

តាមទ្រឹស្តីបទ SIN ក្នុង  $\Delta BDC$

$$\textcircled{1} \frac{BD}{\sin C} = \frac{BC}{\sin \angle BDC}$$

$$\textcircled{1} BD = \frac{8 \sin C}{\sin \angle BDC}$$

$$\textcircled{1} = \frac{8 \frac{\sqrt{5}}{3}}{\frac{2\sqrt{2} + \sqrt{10}}{6}}$$

$$= \frac{16\sqrt{5}}{2\sqrt{2} + \sqrt{10}}$$

$$= \frac{16\sqrt{5}(\sqrt{10} - 2\sqrt{2})}{\sqrt{10}^2 - (2\sqrt{2})^2}$$

$$\textcircled{1} = \frac{16(\sqrt{50} - 2\sqrt{10})}{2}$$

$$= 8 \times 5\sqrt{2} - 16\sqrt{10}$$

$$\textcircled{1} \text{ ឆ្លើយ: } \boxed{BD = 40\sqrt{2} - 16\sqrt{10}}$$

អំណាច ថ្ងៃទី 6 មីនា ឆ្នាំ 2015

បក្ខសម្ភា

(បទដ្ឋាន ក្រុមកំណែ ទី 1.2)

Hehe

បំរើ គ្រប់គ្រង