ថ្នាក់ទី១២

រូបមន្តគណិតវិទ្យា

ចំនួនកុំផ្លិច

លីមីត និងភាពជាប់នៃអនុគមន៍

ដេរីវេនៃអនុគមន៍

អាំងតេក្រាល

គន្លឹះសិក្សាអនុគមន៍

ប្រូបាប

សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

ត្រីកោណមាត្រ

វ៉ិចទ័រក្នុងលំហ

កោនិច

២០២៤

Tel : 014-015 844 866
FB : Sopheasith Seng
IG : seng_sopheasith
TikTok : SengSopheasith
https://sengsopheasith.wordpress.com

រូបមន្តគណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី ១២
ចំនួនកុំផ្លិច

បង្រៀនដោយៈ សេង សុភាសិត វិ.សម្តេចឪ

I. ចំនួននិម្មិត

- i ហៅថាឯកតានិម្មិត ដែល $i^2 = -1$ ឬ $i = \sqrt{-1}$
- ផលគុណនៃចំនួនពិតខុសពីសូន្យនឹង i ជាចំនួននិម្មិត
- បើ $C > 0$ នោះឫសការេនៃ $-C$ គឺ

$$\sqrt{-C} = \sqrt{C\cdot(-1)} = \sqrt{C}\cdot\sqrt{-1} = \sqrt{C}\cdot i$$

II. ចំនួនកុំផ្លិច

- និយមន័យៈ កន្សោមមានរាង $Z = a + bi$ ដែល $a, b \in IR$ ហៅថាចំនួនកុំផ្លិចទម្រង់ពីជគណិត ។
  - a ហៅថាផ្នែកពិត
  - b ហៅថាផ្នែកនិម្មិត
- សំគាល់ៈ ចំនួនកុំផ្លិច $Z = a + bi$ និង $W = c + di$

$$Z = W \Leftrightarrow a + bi = c + di \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$$

III. ចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់

បើ $Z = a + bi$ នោះ $\bar{Z} = a - bi$ ជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់នៃ Z ។ លក្ខណៈចំនួនកុំផ្លិច Z និង W ៖

- $\bar{\bar{Z}} = Z$
- $\overline{Z \pm W} = \bar{Z} \pm \bar{W}$
- $\overline{Z\cdot W} = \bar{Z}\cdot\bar{W}$
- $\overline{(Z/W)} = \bar{Z}/\bar{W}, W \neq 0$

IV. ស្វ័យគុណនៃ i

- $i^1 = i$
- $i^2 = -1$
- $i^3 = -i$
- $i^4 = 1$
- $i^{4k} = 1$
- $i^{4k+1} = i$
- $i^{4k+2} = -1$
- $i^{4k+3} = -i$, $k \in Z$

V. សមីការដឺក្រេទី ២

សមីការរាង $ax^2 + bx + c = 0$; $a \neq 0$

មាន $\Delta = b^2 - 4ac$ ឬ $\Delta' = b'^2 - ac$; $b' = \dfrac{b}{2}$

- បើ $\Delta > 0$ ឬ $\Delta' > 0$ នោះសមីការមានឫសពីរផ្សេងគ្នា

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a}$$

- បើ $\Delta = 0$ ឬ $\Delta' = 0$ នោះសមីការមានឫសឌុប

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a} = \frac{-b'}{a}$$

- បើ $\Delta < 0$ ឬ $\Delta' < 0$ នោះសមីការមានឫសពីរផ្សេងគ្នាជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់ $x_1 = \alpha + \beta i$, $x_2 = \alpha - \beta i$ ។

VI. ម៉ូឌុលនៃចំនួនកុំផ្លិច

- គេមាន $Z = a + bi$ នោះម៉ូឌុលនៃចំនួនកុំផ្លិច Z គឺ

$$r = |Z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

- ទ្រឹស្តីបទៈ បើ Z ជាចំនួនកុំផ្លិច នោះ $|Z|^2 = Z\cdot\bar{Z}$
- លក្ខណៈនៃចំនួនកុំផ្លិចពីរ W និង Z

$i)$ $|WZ| = |W||Z|$ $\qquad ii)$ $\left|\dfrac{W}{Z}\right| = \dfrac{|W|}{|Z|}$

$iii)$ $|W + Z| \le |W| + |Z|$

VII. ទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិច

- គេឲ្យ $Z = a + bi$ បើ $r = |Z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ ហើយ α ($\cos\alpha = \dfrac{a}{r}$ និង $\sin\alpha = \dfrac{b}{r}$) ជាអាគុយម៉ង់នៃ Z គេបាន $Z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ ។
- ទ្រឹស្តីបទៈ គេមាន $Z_1 = r_1(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1)$ និង $Z_2 = r_2(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2)$ គេបាន
  - $Z_1Z_2 = r_1r_2[\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + i\sin(\alpha_1 + \alpha_2)]$
  - $\dfrac{Z_1}{Z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}\left[\cos(\alpha_1 - \alpha_2) + i\sin(\alpha_1 - \alpha_2)\right]$

VIII. ស្វ័យគុណទី n នៃចំនួនកុំផ្លិច

គេមាន $Z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ នោះគេបាន

$$Z^n = \left[r(\cos\alpha + i\sin\alpha)\right]^n = r^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha) \ ; \ \forall n \in Z$$

រូបមន្តដឺម័រ

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = (\cos n\alpha + i\sin n\alpha)$$

IX. រឹសទី n នៃចំនួនកុំផ្លិច

បើ $Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ជាចំនួនកុំផ្លិចមិនសូន្យ និង n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន នោះ Z មានរឹសទី n គឺ

$$W_k = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right]$$

បើ $k = 0;1;2;3;4;\ldots;n-1$ នោះ Z មានរឹសទី n គឺ $W_0; W_1; W_2; W_3; \ldots; W_{n-1}$ ។

រូបមន្តគណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី ១២
លីមីតនៃអនុគមន៍
បង្រៀនដោយៈ សេង សុភាសិត វិ.សម្តេចឪ

I. និយមន័យលីមីតត្រង់ចំនួនកំណត់

- អនុ. f មានលីមីត L កាលណា $x \to a$ បើ $\forall \varepsilon > 0$ មាន $\delta > 0$ ដែល $0 <| x - a |< \delta$ នាំឲ្យ $| f(x) - L |< \varepsilon$ ។ គេសរសេរ $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$
- អនុ. f ខិតជិត $+\infty$ (ឬ $-\infty$)កាលណា $x \to a$ បើ $\forall M > 0$ មាន $\delta > 0$ ដែល $0 <| x - a |< \delta$ នាំឲ្យ $f(x) > M$ (ឬ $f(x) < -M$) ។ គេសរសេរ $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ (ឬ $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$)

II. និយមន័យលីមីតត្រង់អនន្ត

- អនុ. f មានលីមីត L កាលណា $x \to +\infty$ បើ $\forall \varepsilon > 0$ មាន $N > 0$ ដែល $x > N$ នាំឲ្យ $| f(x) - L |< \varepsilon$ ។ គេសរសេរ $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = L$
- អនុ. f មានលីមីត L កាលណា $x \to -\infty$ បើ $\forall \varepsilon > 0$ មាន $N > 0$ ដែល $x < -N$ នាំឲ្យ $| f(x) - L |< \varepsilon$ ។ គេសរសេរ $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = L$

III. ប្រមាណវិធីលើលីមីត

បើ $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L, \lim\limits_{x\to a} g(x) = M, \lim\limits_{x\to a} h(x) = N$

- $\lim\limits_{x\to a} [f(x) \pm g(x)] = M \pm L$
- $\lim\limits_{x\to a} [f(x) + g(x) - h(x)] = L + M - N$
- $\lim\limits_{x\to a} Kf(x) = KL$, K ជាចំនួនថេរ
- $\lim\limits_{x\to a} [f(x) \cdot g(x) \cdot h(x)] = L \cdot M \cdot N$
- $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \dfrac{L}{M}, M \neq 0$
- $\lim\limits_{x\to a} [f(x)]^n = L^n$, n ជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបវិជ្ជមាន

IV. លីមីតនៃអនុគមន៍សនិទាន

- $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$, $a \geq 0$, $n \in IN$
- $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$, $a < 0$, n ជាចំនួនគត់សេស
- $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a} f(x)} = \sqrt[n]{L} = L^{\frac{1}{n}}$

បើ $L \geq 0$ និង $n \in IN, n \geq 2$

បើ $L < 0$ និង $n > 2$ ជាចំនួនគត់សេស

V. លីមីតនៃអនុគមន៍បណ្តាក់

បើ $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L$ និង $\lim\limits_{x\to L} f(x) = f(L)$

នោះគេបាន $\lim\limits_{x\to a} f[g(x)] = L$

VI. លីមីតនៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

- $\lim\limits_{x\to a} \sin x = \sin a$
- $\lim\limits_{x\to a} \cos x = \cos a$
- $\lim\limits_{x\to a} \tan x = \tan a$
- $\lim\limits_{x\to a} \cot x = \cot a$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x} = 0$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin ax}{ax} = 1$

VII. លីមីតនៃអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

- $\lim\limits_{x\to +\infty} e^x = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to -\infty} e^x = 0$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n}$, $n > 0$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^n}{e^x} = 0, n > 0$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

VIII. លីមីតនៃអនុគមន៍លោការីតនេពែ

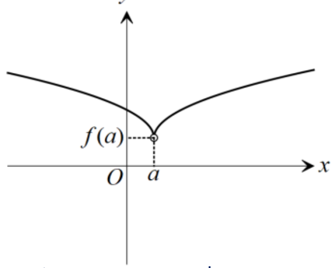
- $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$
- $\lim\limits_{x\to 0} x \ln x = 0$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^n} = 0$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} x^n \ln x = 0$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln\left(1 + x\right)}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} x \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) = 1$

IX. លីមីតមានរាងមិនកំណត់

- $\dfrac{0}{0}$ ៖ត្រូវសរសេរភាគយកនិងភាគបែងជាផលគុណកត្តា ហើយសម្រួលកត្តារួម រួចគណនាលីមីតថ្មី ។
- $\dfrac{\infty}{\infty}$ ៖ត្រូវដាក់តួដែលមានដឺក្រេខ្ពស់ជាងគេទាំងភាគយក និងភាគបែងជាកត្តារួម ហើយសម្រួលកត្តារួមចោល រួចគណនាលីមីតនៃកន្សោមថ្មី ។
- $+\infty - \infty$ ៖ត្រូវដាក់តួដែលមានដឺក្រេខ្ពស់ជាងគេជាកត្តារួម ហើយគណនាលីមីតនៃកន្សោមថ្មី ។

រូបមន្តគណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី ១២
ភាពជាប់នៃអនុគមន៍
បង្រៀនដោយៈ សេង សុភាសិត វិ.សម្តេចឪ

I. ភាពជាប់ត្រង់មួយចំណុច



អនុគមន៍ $y = f(x)$ ជាប់ត្រង់ $x = a$ លុះត្រាតែ ៖

$$\begin{cases} f \text{ កំណត់ត្រង់ } x = a \\ f \text{ មានលីមីតកាលណា } x \to a \\ \lim_{x\to a} f(x) = f(a) \end{cases}$$

<u>**ចំណាំ៖**</u> អនុ. f មានលីមីតត្រង់ $x \to a$

កាលណា $\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x)$

II. លក្ខណៈនៃអនុគមន៍ជាប់

បើអនុ. f និង g ជាប់ត្រង់ $x = a$ គេបាន ៖

- $f(x) + g(x)$ ជាអនុ. ជាប់ត្រង់ $x = a$
- $f(x) - g(x)$ ជាអនុ. ជាប់ត្រង់ $x = a$
- $f(x)\cdot g(x)$ ជាអនុ. ជាប់ត្រង់ $x = a$
- $K\cdot f(x)$ ជាអនុ. ជាប់ត្រង់ $x = a$
- $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ជាអនុ. ជាប់ត្រង់ $x = a$ ដែល $g(a) \neq 0$

III. ភាពជាប់លើចន្លោះ

- f ជាប់លើចន្លោះបើក (a,b) លុះត្រា f ជាប់ចំពោះគ្រប់តម្លៃ x នៃចន្លោះបើកនោះ ។
- f ជាប់លើចន្លោះបិទ $[a,b]$ លុះត្រា f ជាប់លើចន្លោះបើក (a,b) និងមានលីមីត

  $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$ និង $\lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)$ ។

IV. ភាពជាប់នៃអនុគមន៍បណ្តាក់

បើអនុ. g ជាប់ត្រង់ a និងអនុ. f ជាប់ត្រង់ $g(a)$ នោះអនុ.បណ្តាក់ $(f\circ g)(x) = f[g(x)]$ ជាប់ត្រង់ a ។

V. អនុគមន៍បន្លាយតាមភាពជាប់

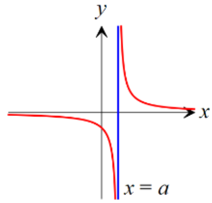
បើ f ជាអនុ.មិនកំណត់ត្រង់ $x = a$ និងមានលីមីត $\lim_{x\to a} f(x) = L$ នោះអនុ.បន្លាយតាមភាពជាប់នៃ f ត្រង់ $x = a$ កំណត់ $g(x) = \begin{cases} f(x) & ; \ x \neq a \\ L & ; \ x = a \end{cases}$

VI. ទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាល

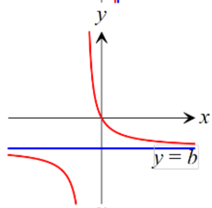
- បើអនុ. f ជាប់លើចន្លោះបិទ $[a,b]$ និង K ជាចំនួនមួយនៅចន្លោះ $f(a)$ និង $f(b)$ នោះមានចំនួនពិត c មួយយ៉ាងតិចនៅចន្លោះបិទ $[a,b]$ ដែល $f(c) = K$ ។
- បើអនុ. f ជាប់លើចន្លោះ $[a,b]$ ហើយ $f(a)\cdot f(b) < 0$ នោះយ៉ាងហោចណាស់មានចំនួន c មួយនៅចន្លោះ a និង b ដែល $f(c) = 0$ ។

VII. អាស៊ីមតូតនៃអនុគមន៍

- បើ $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ នោះ បន្ទាត់មានសមីការ $x = a$ ជា <u>**អាស៊ីមតូតឈរ**</u> នៃ f ។

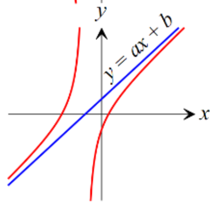


- បើ $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = b$ នោះ បន្ទាប់មានសមីការ $y = b$ ជា <u>**អាស៊ីមតូតដេក**</u> នៃ f ។



- **អាស៊ីមតូតទ្រេត**

  សមីការបន្ទាត់ $y = ax + b$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាបតាងអនុគមន៍ f កាលណា $\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x) - y\right] = 0$ ។



- **របៀបផ្សេងទៀត**

  បន្ទាត់អាស៊ីមតូតទ្រេត $y = ax + b$ នៃក្រាបតាង f គឺមាន $a = \lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ និង $b = \lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x) - ax\right]$ ។

រូបមន្តគណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី ១២
ដេរីវេនៃអនុគមន៍
បង្រៀនដោយៈ សេង សុភាសិត វិ.សម្តេចឪ

I. ដេរីវេនៃអនុគមន៍ x_o

ដេរីវេត្រង់ x_o នៃអនុគមន៍ $y = f(x)$ ជាលីមីតនៃផលធៀបកំណើនកាលណា Δx ខិតជិត 0 ។ គេសរសេរ ៖

$$y'_o = f'(x_o) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$$

ឬ $f'(x_o) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h}$;$(h = x - x_o)$

II. ភាពមានដេរីវេ និងភាពជាប់

- f មានដេរីវេត្រង់ $x_0 = a$ នោះ f ជាប់ត្រង់ $x_o = a$
- f ជាប់ត្រង់ $x_0 = a$ នោះមិនប្រាកដថា f មានដេរីវេត្រង់ $x_o = a$ ទេ។
- f មានដេរីវេត្រង់ $x_o = a$ កាលណា៖

$$\begin{cases} f \text{ មានលីមីតត្រង់ } x_o = a \\ f'_-(x_o) = f'_+(x_o) \end{cases}$$

III. ដេរីវេនៃអនុគមន៍បណ្តាក់

បើ $y = f(u)$ និង $u = g(x)$ នោះ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \times \dfrac{du}{dx}$

ឬ $\dfrac{d}{dx} f[u(x)] = f'(x) \times u'(x)$ ។

IV. រូបមន្តដេរីវេនៃអនុគមន៍សំខាន់ៗ

- $y = k \quad \Rightarrow \quad y' = 0$; k : ថេរ
- $y = x \quad \Rightarrow \quad y' = 1$; x : អថេរ
- $y = ax + b \quad \Rightarrow \quad y' = a$
- $y = x^n \quad \Rightarrow \quad y' = nx^{n-1}$
- $y = \dfrac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad y' = \dfrac{-1}{x^2}$
- $y = \dfrac{1}{x^n} \quad \Rightarrow \quad y' = \dfrac{-n}{x^{n+1}}$
- $y = \sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
- $y = k \cdot u \quad \Rightarrow \quad y' = k \cdot u'$
- $y = u + v \quad \Rightarrow \quad y' = u' + v'$
- $y = u - v \quad \Rightarrow \quad y' = u' - v'$
- $y = u \cdot v \quad \Rightarrow \quad y' = u' \cdot v + v' \cdot u$
- $y = u \cdot v \cdot w \quad \Rightarrow \quad y' = u'vw + uv'w + uvw'$
- $y = \dfrac{u}{v} \quad \Rightarrow \quad y' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$
- $y = \dfrac{c}{v} \quad \Rightarrow \quad y' = \dfrac{-cv'}{v^2}$; c : ថេរ
- $y = \dfrac{u}{c} \quad \Rightarrow \quad y' = \dfrac{u'}{c}$; c : ថេរ
- $y = u^n \quad \Rightarrow \quad y' = nu'u^{n-1}$
- $y = \dfrac{1}{u^n} \quad \Rightarrow \quad y' = \dfrac{-nu'}{u^{n+1}}$
- $y = \dfrac{1}{u} \quad \Rightarrow \quad y' = \dfrac{-u'}{u^2}$
- $y = \sqrt{u} \quad \Rightarrow \quad y' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

V. ដេរីវេអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

- $y = \sin x \quad \Rightarrow \quad y' = \cos x$
- $y = \cos x \quad \Rightarrow \quad y' = -\sin x$
- $y = \tan x \quad \Rightarrow \quad y' = 1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
- $y = \cot x \quad \Rightarrow \quad y' = -(1 + \cot^2 x) = \dfrac{-1}{\sin^2 x}$
- $y = \sin u \quad \Rightarrow \quad y' = u'\cos u$
- $y = \cos u \quad \Rightarrow \quad y' = -u'\sin u$
- $y = \tan u \quad \Rightarrow \quad y' = u'(1 + \tan^2 u) = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$
- $y = \cot u \quad \Rightarrow \quad y' = -u'(1 + \cot^2 u) = \dfrac{-u'}{\sin^2 u}$

VI. ដេរីវេនៃអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល និងលោការីត

- $y = \ln x \quad \Rightarrow \quad y' = \dfrac{1}{x}$
- $y = \ln u \quad \Rightarrow \quad y' = \dfrac{u'}{u}$
- $y = e^x \quad \Rightarrow \quad y' = e^x$
- $y = e^u \quad \Rightarrow \quad y' = u'e^u$

VII. ដេរីវេលំដាប់ខ្ពស់

ដេរីវេនៃអនុគមន៍ $y = f(x)$ អាចមានដេរីវេខ្លួនឯងទៀត គេហៅ ដេរីវេបន្តបន្ទាប់នេះថា ដេរីវេលំដាប់ 2 ; ដេរីវេលំដាប់ 3 ;...;ដេរីវេលំដាប់ n តាង $f', f'', \dots, f^{(n)}$

រូបមន្តគណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី ១២
អាំងតេក្រាលមិនកំណត់

បង្រៀនដោយៈ សេង សុភាសិត វិ.សម្តេចឪ

I. និយមន័យ

បើ $F(x)$ ជាព្រីមីទីវមួយនៃ $f(x)$ គេបាន

$\int f(x)dx = F(x) + c$, $c :$ ថេរ ។

II. រូបមន្តអាំងតេក្រាលមិនកំណត់

1. $\int k dx = kx + c$, $c :$ ថេរ
2. $\int x dx = \dfrac{x^2}{2} + c$
3. $\int x^2 dx = \dfrac{x^3}{3} + c$
4. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c$
5. $\int \dfrac{1}{x} dx = \ln|x| + c$
6. $\int \dfrac{1}{x^2} dx = -\dfrac{1}{x} + c$
7. $\int \dfrac{1}{x^n} dx = -\dfrac{1}{(n-1)x^{n-1}} + c$
8. $\int \dfrac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + c$
9. $\int \dfrac{1}{\sqrt{x+a}} dx = 2\sqrt{x+a} + c$
10. $\int \dfrac{1}{ax+b} dx = \dfrac{1}{a}\ln|ax+b| + c$
11. $\int e^x dx = e^x + c$
12. $\int e^{ax} dx = \dfrac{1}{a} e^{ax} + c$
13. $\int e^{ax+b} dx = \dfrac{1}{a} e^{ax+b} + c$
14. $\int \sin x dx = -\cos x + c$
15. $\int \cos x dx = \sin x + c$
16. $\int \sin ax dx = -\dfrac{1}{a}\cos ax + c$
17. $\int \sin(ax+b) dx = -\dfrac{1}{a}\cos(ax+b) + c$
18. $\int \cos ax dx = \dfrac{1}{a}\sin ax + c$
19. $\int \cos(ax+b) dx = \dfrac{1}{a}\sin(ax+b) + c$
20. $\int \dfrac{1}{\cos^2 x} dx = \int (1+\tan^2 x) dx = \tan x + c$
21. $\int \dfrac{1}{\sin^2 x} dx = \int (1+\cot^2 x) dx = -\cot^2 x + c$
22. $\int k u' dx = ku + c$
23. $\int u' u^n dx = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + c$
24. $\int \dfrac{u'}{u} dx = \ln|u| + c$
25. $\int \dfrac{u'}{u^2} dx = -\dfrac{1}{u} + c$
26. $\int \dfrac{u'}{\sqrt{u}} dx = 2\sqrt{u} + c$
27. $\int \dfrac{u'}{u^n} dx = -\dfrac{1}{(n-1)u^{n-1}} + c$
28. $\int u' e^u dx = e^u + c$
29. $\int u' \sin u dx = -\cos u + c$
30. $\int u' \cos u dx = \sin u + c$
31. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + c$
32. $\int \dfrac{u'}{\cos^2 u} dx = \tan u + c$
33. $\int \dfrac{u'}{\sin^2 u} dx = -\cot u + c$
34. $\int \dfrac{1}{a^2-x^2} dx = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x+a}{x-a}\right| + c$
35. $\int \dfrac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} dx = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| + c$
36. $\int \dfrac{1}{a^2+x^2} dx = \dfrac{1}{a}\arctan\dfrac{x}{a} + c$
37. $\int \dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arcsin\dfrac{x}{a} + c$
38. $\int \dfrac{u'}{\sqrt{u^2+a^2}} dx = \ln\left|u+\sqrt{u^2+a^2}\right| + c$

រូបមន្តគណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី ១២

អាំងតេក្រាលកំណត់

បង្រៀនដោយៈ សេង សុភាសិត វិ.សម្តេចឪ

I. និយមន័យអាំងតេក្រាលកំណត់

អាំងតេក្រាលកំណត់ពី a ទៅ b នៃអនុគមន៍ $y=f(x)$ ដែលជាប់ និងមានដេរីវេលើចន្លោះបិទ $\left[a,b\right]$ គឺជាកំនើនអនុគមន៍ព្រីមីទីវ $F(x)$ នៃអនុគមន៍ $f(x)$ ដែលត្រូវកំនើននៃ x ពី a ទៅ b ។

កំណត់ដោយ $\int_a^b f(x)dx=\left[F(x)\right]_a^b=F(b)-F(a)$

II. លក្ខណៈនៃអាំងតេក្រាលកំណត់

ចំពោះអនុគមន៍ f និង g កំណត់ និងជាប់លើចន្លោះ $\left[a,b\right]$ ដែល $c\in\left[a,b\right]$ ហើយ $k\in\mathbb{R}$ គេបាន៖

- $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$
- $\int_a^a f(x)dx=0$
- $\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx=\int_a^b f(x)dx$
- $\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$
- $\int_a^b\left[f(x)\pm g(x)\right]dx=\int_a^b f(x)dx\pm\int_a^b g(x)dx$
- $f(x)\ge 0$ គ្រប់ $x\in\left[a,b\right]$ នោះ $\int_a^b f(x)dx\ge 0$
- $f(x)\ge g(x)\;,\forall x\in\left[a,b\right]\Rightarrow\int_a^b f(x)dx\ge\int_a^b g(x)dx$

III. អាំងតេក្រាលកំណត់ដោយប្តូរអថេរ

បើ $u=g(x)$ ជាអនុគមន៍ជាប់ និងមានដេរីវេលើចន្លោះ $\left[a,b\right]$ គេបាន ៖

$$\int_a^b f\left[g(x)\right]\cdot g'(x)dx=\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

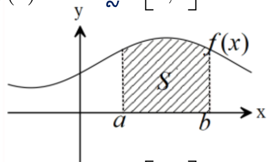
IV. អាំងតេក្រាលកំណត់ដោយផ្នែក

បើ f និង g ជាអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះ $\left[a,b\right]$ និង មានដេរីវេលើចន្លោះ (a,b) គេបាន៖

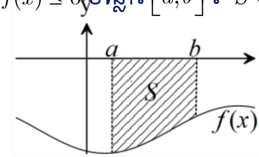
$$\int_a^b f(x)\cdot g'(x)dx=\left[f(x)\cdot g(x)\right]_a^b-\int_a^b g(x)\cdot f'(x)dx$$

V. ផ្ទៃក្រឡាខ័ណ្ឌដោយក្រាបតាងអនុគមន៍ ,អ័ក្ស $(x'x)$ និងបន្ទាត់ឈរ $x=a;x=b$

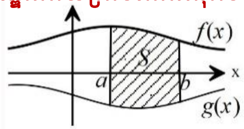
- ករណី $f(x)\ge 0$ ចន្លោះ $\left[a,b\right]$ ៖ $S=\int_a^b f(x)dx$



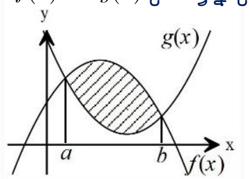
- ករណី $f(x)\le 0$ ចន្លោះ $\left[a,b\right]$ ៖ $S=-\int_a^b f(x)dx$



VI. ផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយក្រាបតាងអនុគមន៍ពីរ



- ករណី $f(x)\ge g(x)\Rightarrow S=\int_a^b\left[f(x)-g(x)\right]dx$
- ករណី $g(x)\ge f(x)\Rightarrow S=\int_a^b\left[g(x)-f(x)\right]dx$
- ករណីក្រាប $f(x)$ និង $g(x)$ ប្រសព្វគ្នាត្រង់ a និង b

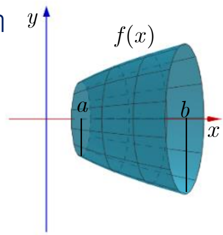


$S=\int_a^b\left[f(x)-g(x)\right]dx$ បើ $f(x)\ge g(x)$

$S=\int_a^b\left[f(x)-g(x)\right]dx$ បើ $g(x)\ge f(x)$

VII. មាឌសូលីតបរិវត្តនៃក្រាបវិលជុំវិញអ័ក្ស $(x'x)$

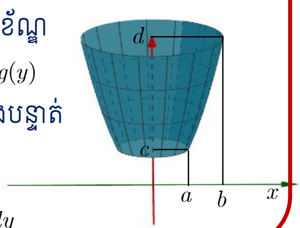
មាឌនៃសូលីតនៃផ្ទៃខ័ណ្ឌ ដោយខ្សែតាង $y=f(x)$ ជុំវិញអ័ក្ស $(x'x)$ និង បន្ទាត់ឈរ $x=a;x=b$



$$V=\int_a^b\pi\left[f(x)\right]^2dx$$

VIII. មាឌសូលីតនៃក្រាបវិលជុំវិញអ័ក្ស $(y'y)$

មាឌនៃសូលីតនៃផ្ទៃខ័ណ្ឌ ដោយខ្សែតាង $x=g(y)$ ជុំវិញអ័ក្ស $(y'y)$ និងបន្ទាត់ដេក $y=c\;;\;y=d$



$$V=\int_c^d\pi\left[g(y)\right]^2dy$$

រូបមន្តគណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី ១២

សិក្សាអនុគមន៍

បង្រៀនដោយ៖ សេង សុភាសិត វិ.សម្ដេចឪ

1. ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍

- អនុគមន៍ពហុធា

  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_o$

  មានដែនកំណត់ $D = \{x \mid x \in \mathbb{R}\}$
- អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល $f(x) = e^x$

  មានដែនកំណត់ $D = \{x \mid x \in \mathbb{R}\}$
- អនុគមន៍លោការីតនេពែ $f(x) = \ln\left[u(x)\right]$

  មានដែនកំណត់ $D = \{x \mid u(x) > 0\}$
- អនុគមន៍ប្រភាគសនិទាន $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$

  មានដែនកំណត់ $D = \{x \mid Q(x) \neq 0\}$
- អនុគមន៍អសនិទាន $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$

  -បើ n ជាចំនួនគត់គូវិជ្ជមាន $D = \{x \mid g(x) \geq 0\}$

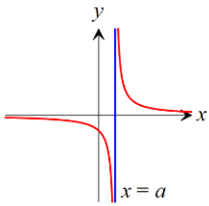
  -បើ n ជាចំនួនគត់សេសវិជ្ជមាន $D = \{x \mid x \in \mathbb{R}\}$

2. សមីការអាស៊ីមតូត

- បើ $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ នោះ

  បន្ទាត់មានសមីការ $x = a$

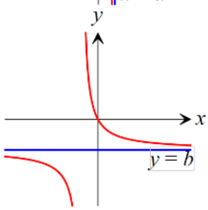
  ជា *អាស៊ីមតូតឈរ* នៃ f ។



- បើ $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = b$ នោះ

  បន្ទាប់មានសមីការ $y = b$

  ជា *អាស៊ីមតូតដេក* នៃ f ។



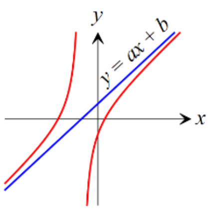
- **អាស៊ីមតូតទ្រេត**

  សមីការបន្ទាត់ $y = ax + b$

  ជា*អាស៊ីមតូតទ្រេត*នៃក្រាប

  តាងអនុគមន៍ f កាលណា

  $\lim\limits_{x \to \pm\infty}\left[f(x) - y\right] = 0$ ។



- **របៀបផ្សេងទៀត**

  បន្ទាត់*អាស៊ីមតូតទ្រេត* $y = ax + b$ នៃក្រាបតាង f

  គឺមាន $a = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ និង $b = \lim\limits_{x \to \pm\infty}\left[f(x) - ax\right]$ ។

3. សមីការបន្ទាត់ប៉ះ

សមីការបន្ទាត់ប៉ះទៅនឹង $(C): y = f(x)$ ត្រង់

$x = x_o$ មានរាង $(T): y = f'(x_o)(x - x_o) + y_o$

ដែល $y_o = f(x_o)$ ។

4. អនុគមន៍គូ-អនុគមន៍សេស

- អនុគមន៍ $y = f(x)$ ជា*អនុគមន៍គូ* កាលណា

  $\forall x \in D_f \;; -x \in D_f \Rightarrow f(x) = f(x)$
- អនុគមន៍ $y = f(x)$ ជា*អនុគមន៍សេស* កាលណា

  $\forall x \in D_f \;; -x \in D_f \Rightarrow f(x) = -f(x)$

5. អ័ក្សឆ្លុះ ឬ ផ្ចិតឆ្លុះ

☞ បើ $x = a$ ជា*អ័ក្សឆ្លុះ*នៃក្រាប $(C): y = f(x)$

លុះត្រាតែ $f(2a - x) = f(x)$

☞ បើ $I(a, b)$ ជា*ផ្ចិតឆ្លុះ*នៃក្រាប $(C): y = f(x)$

លុះត្រាតែ $f(2a - x) + f(x) = 2b$

☞ បើ f ជាអនុគមន៍សេស នោះក្រាបនៃ f មាន*ផ្ចិតឆ្លុះ*

ត្រង់គល់តម្រុយ $O(0,0)$ ។

☞ បើ f ជាអនុគមន៍គូ នោះក្រាបនៃ f មាន*អ័ក្សឆ្លុះ*មួយ

គឺ $x = 0$ ។

6. បំលែងផ្ចិតឆ្លុះ ឬ អ័ក្សឆ្លុះ

គេអាចបង្ហាញចំណុច $I(a,b)$ ជា*ផ្ចិតឆ្លុះ* ឬបន្ទាត់

$x = a$ ជា*អ័ក្សឆ្លុះ*នៃក្រាបតាងអនុគមន៍ $y = f(x)$

តាមបម្លែងកិលអ័ក្សនៃវិចទ័រ $\overrightarrow{OI}$ ដែល

$\overrightarrow{OI} : \begin{cases} x = X + a \\ y = Y + b \end{cases}$ ដោយយក $\begin{cases} x = X + a \\ y = Y + b \end{cases}$

ទៅជំនួសក្នុងទំនាក់ទំនង $y = f(x)$ គេបានសមីការថ្មី

$Y + b = f(X + a) \;\Rightarrow\; Y = F(X)$

- បើ $F(X)$ ជាអនុគមន៍សេស នោះក្រាបតាងអនុគមន៍

  f មាន*ផ្ចិតឆ្លុះ*មួយ គឺ $I(a,b)$ ។

- បើ $F(X)$ ជាអនុគមន៍គូ នោះក្រាបតាងអនុគមន៍ f មាន*អ័ក្សឆ្លុះ*មួយ គឺ $x = a$ ។

7. ការកំណត់បរមានៃអនុគមន៍តាមសញ្ញាដេរីវេទី១

បើអនុគមន៍ $y = f(x)$ មានដេរីវេ $f'(x)$
និងសមីការ $f'(x) = 0$ មានឫស $x = x_o$

- អនុគមន៍ f មានអតិបរមាត្រង់ $x = x_o$ កាលណា សញ្ញា f' ប្តូរសញ្ញាពី $(+) \to (-)$
តម្លៃអតិបរមាគឺ $y_{\max} = f(x_o)$

x		x_o	
f'	$+$	0	$-$

- អនុគមន៍ f មានអប្បបរមាត្រង់ $x = x_o$ កាលណា សញ្ញា f' ប្តូរសញ្ញាពី $(-) \to (+)$
តម្លៃអប្បបរមាគឺ $y_{\min} = f(x_o)$

x		x_o	
f'	$-$	0	$+$

8. ការកំណត់បរមានៃអនុគមន៍តាមដេរីវេទី២

- អនុគមន៍ $y = f(x)$ មានតម្លៃអតិបរមាត្រង់ $x = x_o$

កាលណា $\begin{cases} f'(x_o) = 0 \\ f''(x_o) < 0 \end{cases}$

តម្លៃអតិបរមា $y_{\max} = f(x_o) = M$

- អនុគមន៍ $y = f(x)$ មានតម្លៃអប្បបរមាត្រង់ $x = x_o$

កាលណា $\begin{cases} f'(x_o) = 0 \\ f''(x_o) > 0 \end{cases}$

តម្លៃអប្បបរមា $y_{\min} = f(x_o) = m$

9. ចំណុចរបត់នៃក្រាប

- **អនុគមន៍ប៉ោង**

ចំពោះគ្រប់ $x \in I$ បើ $f''(x) < 0$ នោះអនុគមន៍ f ជាអនុគមន៍ f ប៉ោងលើចន្លោះ I ។

- **អនុគមន៍ផត**

ចំពោះគ្រប់ $x \in I$ បើ $f''(x) > 0$ នោះអនុគមន៍ f ជាអនុគមន៍ f ផតលើចន្លោះ I ។

- **ចំណុចរបត់នៃក្រាប**

ចំណុច (x_o, y_o) ជាចំណុចរបត់នៃក្រាបតាង f តាងអនុគមន៍ $y = f(x)$ កាលណាក្រាបនៃ f ផ្លាស់ប្តូរភាពផត-ប៉ោង ឬប៉ោង-ផត ត្រង់ចំណុចនោះ។

- **របៀបរកចំណុចរបត់**

ដើម្បីរកចំណុចរបត់នៃក្រាបតាង $y = f(x)$ គេត្រូវ៖
- គណនាដេរីវេទី២ $f''(x)$
- ដោះស្រាយសមីការ $f''(x) = 0$ រកឫសឫស x_o
- សិក្សាសញ្ញាដេរីវេទី២ $f''(x)$

○

x		x_o	
f''	$+$	0	$-$
f	ផត	$f(x_o)$	ប៉ោង

ត្រង់ $x = x_o$ សញ្ញា f'' ប្តូរពី $(+)$ ទៅ $(-)$ នោះអនុគមន៍ f ផ្លាស់ប្តូរភាពផត-ប៉ោង នោះ អនុគមន៍ f មានចំណុចរបត់មួយត្រង់ $x = x_o$ ដែលមានកូអរដោនេ $I\left(x_o, f(x_o)\right)$ ។

○

x		x_o	
f''	$-$	0	$+$
f	ប៉ោង	$f(x_o)$	ផត

ត្រង់ $x = x_o$ សញ្ញា f'' ប្តូរពី $(+)$ ទៅ $(-)$ នោះអនុគមន៍ f ផ្លាស់ប្តូរភាពផត-ប៉ោង នោះ អនុគមន៍ f មានចំណុចរបត់មួយត្រង់ $x = x_o$ ដែលមានកូអរដោនេ $I\left(x_o, f(x_o)\right)$ ។

10. សិក្សាទីតាំងធៀបរវាងក្រាបនិងបន្ទាត់ដេក

ដើម្បីសិក្សាទីតាំងធៀបរវាងក្រាប (C) តាង $f(x)$ ធៀបនឹងបន្ទាត់ដេក (d) $y = b$ គេត្រូវសិក្សាសញ្ញានៃកន្សោម $h(x) = f(x) - y_d$ គេបាន៖

- បើ $h(x) > 0$ នោះក្រាប (C) នៅលើបន្ទាត់ (d)
- បើ $h(x) < 0$ នោះក្រាប (C) នៅក្រោមបន្ទាត់ (d)
- បើ $h(x) = 0$ នោះក្រាប (C) នៅកាត់បន្ទាត់ (d)

11. សិក្សាទីតាំងធៀបរវាងក្រាបនិងបន្ទាត់ទ្រេត

ដើម្បីសិក្សាទីតាំងធៀបរវាងក្រាប (C) តាង $f(x)$ ធៀបនឹងបន្ទាត់ដេក (d) $y = ax + b$ គេត្រូវសិក្សា សញ្ញានៃកន្សោម $h(x) = f(x) - y_d$ គេបាន៖

- បើ $h(x) > 0$ នោះក្រាប (C) នៅលើបន្ទាត់ (d)
- បើ $h(x) < 0$ នោះក្រាប (C) នៅក្រោមបន្ទាត់ (d)
- បើ $h(x) = 0$ នោះក្រាប (C) នៅកាត់បន្ទាត់ (d)

12. ប្លង់សិក្សាអនុគមន៍

+ រកដែនកំណត់
+ លីមីតត្រង់ចុងដែនកំណត់
+ សមីការអាស៊ីមតូត (បើមាន)
+ ទិសដៅអថេរភាព
  - គណនាដេរីវេ $f'(x)$
  - រកឫសនៃសមីការ $f'(x) = 0$
  - តារាងសញ្ញា $f'(x)$
  - តម្លៃបរមា (បើមាន)
  - តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍
+ សង់ក្រាបតាងអនុគមន៍
  - ចំណុចប្រសព្វរវាងអ័ក្ស $(x'x)$ និងក្រាប(បើមាន)
  - ចំណុចប្រសព្វរវាងអ័ក្ស $(y'y)$ និងក្រាប(បើមាន)
  - ធ្វើតារាងតម្លៃលេខជំនួយ (បើចាំបាច់)
  - សង់ក្រាប
  - អ័ក្សឆ្លុះ និងផ្ចិតឆ្លុះ (បើមាន) ។

13. របៀបទាញរកសញ្ញានៃ $f(x)$

ករណីទី១

x	a		x_0		b
f'		$-$	○	$+$	
f		↘	0	↗	

គេទាញបាន៖

- $f(x) > 0$ បើ $x \in (a, x_o)$
- $f(x) > 0$ បើ $x \in (x_o, b)$
- $f(x) = 0$ បើ $x = x_o$

ករណីទី២

x	a		x_0		b
f'		$+$	○	$-$	
f		↗	0	↘	

គេទាញបាន៖

- $f(x) < 0$ បើ $x \in (a, x_o)$
- $f(x) < 0$ បើ $x \in (x_o, b)$
- $f(x) = 0$ បើ $x = x_o$

ករណីទី៣

x	a		x_0		b
f'		$-$	○	$-$	
f		↘	0	↘	

គេទាញបាន៖

- $f(x) > 0$ បើ $x \in (a, x_o)$
- $f(x) < 0$ បើ $x \in (x_o, b)$
- $f(x) = 0$ បើ $x = x_o$

ករណីទី៤

x	a		x_0		b
f'		$+$	○	$+$	
f		↗	0	↗	

គេទាញបាន៖

- $f(x) < 0$ បើ $x \in (a, x_o)$
- $f(x) > 0$ បើ $x \in (x_o, b)$
- $f(x) = 0$ បើ $x = x_o$

ករណីទី៥

x	a		x_0		b
f'		$-$	○	$+$	
f		↘	$(+)$	↗	

គេទាញបាន៖ $f(x) > 0$ បើ $x \in (a, b)$

ករណីទី៦

x	a		x_0		b
f'		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$	$(-)$	$\searrow$	

គេទាញបាន៖ $f(x)<0$ បើ $x\in(a,b)$

ករណីទី៧

x	a		α		x_0		δ		b
f'		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
f		$\nearrow$	0	$\nearrow$	$(+)$	$\searrow$	0	$\searrow$	

គេទាញបាន៖

- $f(x)<0$ បើ $x\in(a,\alpha)\cup(\delta,b)$
- $f(x)>0$ បើ $x\in(\alpha,\delta)$
- $f(x)=0$ បើ $x=\{\alpha,\delta\}$

ករណីទី៨

x	a		α		x_0		δ		b
f'		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
f		$\searrow$	0	$\searrow$	$(-)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	

គេទាញបាន៖

- $f(x)>0$ បើ $x\in(a,\alpha)\cup(\delta,b)$
- $f(x)<0$ បើ $x\in(\alpha,\delta)$
- $f(x)=0$ បើ $x=\{\alpha,\delta\}$

14. ទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាល

- បើ f ជាប់លើ $[a,b]$ និង $f(a)\cdot f(b)<0$ នោះ $f(x)=0$ មានឫសមួយយ៉ាងតិចចន្លោះ $[a,b]$
- បើ f ជាប់និងកើនដាច់ខាត ឬចុះដាច់ខាតលើ $[a,b]$ និង $f(a)\cdot f(b)<0$ $f(x)=0$ មានឫសតែមួយគត់ក្នុងចន្លោះ $[a,b]$ ។

15. អនុគមន៍កើនដាច់ខាត និងចុះដាច់ខាត

- បើ $f'(x)<0$ ចំពោះ $x\in(a,b)$ នោះអនុគមន៍ f ចុះដាច់ខាតលើចន្លោះ (a,b)
- បើ $f'(x)>0$ ចំពោះ $x\in(a,b)$ នោះអនុគមន៍ f កើនដាច់ខាតលើចន្លោះ (a,b)

16. លក្ខណៈអនុគមន៍កើនដាច់ខាត និងចុះដាច់ខាត

- បើ f ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាត គេទាញបាន៖
  - ចំពោះ៖ $a<b$ សមមូល $f(a)<f(b)$
  - ចំពោះ៖ $a>b$ សមមូល $f(a)>f(b)$
- បើ f ជាអនុគមន៍ចុះដាច់ខាត គេទាញបាន៖
  - ចំពោះ៖ $a<b$ សមមូល $f(a)>f(b)$
  - ចំពោះ៖ $a>b$ សមមូល $f(a)<f(b)$

17. សិក្សាចំនួនឫសនៃសមីការតាមតម្លៃប៉ារ៉ាម៉ែត្រ m

សមីការ $f(x)=m$ ជាសមីការអាប់ស៊ីសតាងឲ្យប្រសព្វរវាងក្រាប (C) តាងអនុគមន៍ $y=f(x)$ និងបន្ទាត់ដេក $(d): y=m$ ។ ចំនួនឫសនៃសមីការ ជាចំនួនចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ $y=m$ គេបាន៖

- ក្រាប (C) មិនកាត់ (d) នោះសមីការគ្មានឫស
- ក្រាប (C) ប៉ះបន្ទាត់ (d) នោះសមីការមានឫសឌុប
- ក្រាប (C) កាត់បន្ទាត់ (d) ត្រង់ពីរចំណុចផ្សេងគ្នា នោះសមីការមានឫសពីរផ្សេងគ្នា

18. សិក្សាវិសមីការតាមក្រាប

ក្រាប (C) តាងឲ្យអនុគមន៍ $y=f(x)$ និងបន្ទាត់ $(d): y=m$ ហើយ $h(x)=f(x)-y$ គេបាន៖

- បើ $h(x)>0$ មានន័យថាក្រាប (C) នៅលើបន្ទាត់ (d) ហើយសំណុំចម្លើយនៃវិសមីការ $h(x)>0$ ជាសំណុំតម្លៃ x ទាំងឡាយណាដែលត្រូវនឹងលក្ខខណ្ឌក្រាប (C) នៅលើបន្ទាត់ (d) ។
- បើ $h(x)<0$ មានន័យថាក្រាប (C) នៅក្រោមបន្ទាត់ (d) ហើយសំណុំចម្លើយនៃវិសមីការ $h(x)>0$ ជាសំណុំតម្លៃ x ទាំងឡាយណាដែលត្រូវនឹងលក្ខខណ្ឌក្រាប (C) នៅក្រោមបន្ទាត់ (d) ។
- បើ $h(x)=0$ មានន័យថាក្រាប (C) កាត់បន្ទាត់ (d) ហើយចម្លើយនៃសមីការ $h(x)=0$ ជាតម្លៃ x ទាំងឡាយណាដែលត្រូវនឹងលក្ខខណ្ឌក្រាប (C) កាត់នឹងបន្ទាត់ (d) ។

រូបមន្តគណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី ១២
វិភាគបន្សំ និងប្រូបាប
បង្រៀនដោយ ៖ សេង សុភាសិត វិ.សម្តេចឪ

I. គោលការណ៍ផលបូក

A និង B ជាព្រឹត្តិការណ៍ពីរ ហើយ $n(A)$ និង $n(B)$ ជាចំនួនលទ្ធផលនៃព្រឹត្តិ. A និង B ។

⊕ បើ A និង B មិនចុះសម្រុងគ្នា

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)$$

⊕ បើ A និង B ចុះសម្រុងគ្នា

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$
$$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$$

II. គោលការណ៍ផលគុណ

ព្រឹត្តិ. A កើតឡើង m របៀប ហើយមានព្រឹត្តិ. B កើតឡើង n របៀបបន្តទៀត នោះចំនួនលទ្ធផលដែលព្រឹត្តិ. A និង B កើតឡើង គឺ $m\times n$ ។

III. ចំនួនហ្វាក់តូរ្យែល

- $0!=1$
- $1!=1$
- $2!=2\times 1=2$
- $3!=3\times 2\times 1=6$
- $n!=n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times 2\times 1$
- $n!=n\times(n-1)!=n\times(n-1)\times(n-2)!$

IV. ចម្លាស់

<u>និយមន័យ</u> ៖ ចម្លាស់ n ធាតុខុសគ្នា គឺជាតម្រៀបមានលំដាប់នៃ n ធាតុដែលធាតុមួយនៅលំដាប់ទី១, ធាតុមួយទៀតនៅលំដាប់ទី២ និងបន្តរបន្ទាប់ ។

- ចម្លាស់នៃ n ធាតុខុសៗគ្នា $P(n,n)=n!$
- ចម្លាស់នៃ r ធាតុ យកពី n ធាតុខុសគ្នា

$$P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}$$

- ចម្លាស់ច្រំដែល r ដងនៃ n ធាតុ $P=n^r$
- ចម្លាស់រង្វង់នៃ n ធាតុខុសគ្នា $P=\frac{n!}{n}=(n-1)!$
- ចម្លាស់បែងចែកបាន

$$P=\frac{n!}{n_1!\times n_2!\times\ldots\times n_k!}\ ;\ k\in\mathbb{N}$$

V. បន្សំ

និយមន័យ ៖ បន្សំនៃ r ធាតុយកចេញពី n ធាតុ គឺជាការយកព្រមគ្នាម្តង r ធាតុចេញពី n ធាតុខុសៗគ្នា ដោយមិនគិតលំដាប់នៃធាតុ ។

ចំនួនបន្សំនៃ r ធាតុយកចេញពី n ធាតុខុសគ្នា គឺ

$$C(n,r)=\frac{P(n,r)}{r!}=\frac{n!}{(n-r)!\times r!}$$

<u>ចំណាំ</u>៖
- $C(n,n)=1$
- $C(n,1)=n$
- $C(n,n-1)=n$

VI. ប្រូបាប

ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិ. A ក្នុងលំហសំណាក S កំណត់ដោយ៖

$$P(A)=\frac{\text{ករណីស្រប}}{\text{ករណីអាច}}=\frac{n(A)}{n(S)}$$ ។

VII. ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍សមាស

- បើព្រឹត្តិ. A និង B មិនទាក់ទងគ្នា

$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$$

- បើព្រឹត្តិ. A និង B ទាក់ទងគ្នា

$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B/A)$$

- បើព្រឹត្តិ. A និង B មិនចុះសម្រុងគ្នា

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

- បើព្រឹត្តិ. A និង B មិនចុះសម្រុងគ្នា

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

- ព្រឹត្តិ. $\overline{A}$ ផ្ទុយពីព្រឹត្តិ. A ៖ $P(\overline{A})=1-P(A)$
- <u>សម្គាល់</u> ៖ $P(\varnothing)=0, P(S)=1, 0\le P(A)\le 1$

VIII. ប្រូបាបមានលក្ខខ័ណ្ឌ

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\ ;\ P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

IX. ប្រូបាបសរុប ៖ $P(B)=\sum_{i=1}^{n}\left[P(B/A_i)\times P(A_i)\right]$

X. ទ្រឹស្តីបទបៃយេស ៖

$$P(A_k/B)=\frac{P(B/A_k)\times P(A_k)}{\sum_{i=1}^{n}\left[P(B/A_i)\times P(A_i)\right]}$$

រូបមន្តគណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី ១២
សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

បង្រៀនដោយ៖ សេង សុភាសិត វិ.សម្តេចឪ

I. សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលរាង $\dfrac{dy}{dx}=f(x)$

- សរសេរសមីការជារាង $dy=f(x)dx$
- គណនាអាំងតេក្រាលលើអង្គទាំងពីរ

$$\int dy=\int f(x)dx$$

$$\Rightarrow \quad y=F(x)+c \ , \ c\in IR$$

ជាចម្លើយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល ។

II. សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលរាង $g(y)\dfrac{dy}{dx}=f(x)$

(ដែលអាចញែកអថេរបាន)

- សរសេរសមីការជារាង $g(y)dy=f(x)dx$
- គណនាអាំងតេក្រាលលើអង្គទាំងពីរ

$$\int g(y)dy=\int f(x)dx$$

$$\Rightarrow \quad G(y)=F(x)+c \ , \ c\in IR$$

ជាសម្លើយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល ។

III. សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់១ អូម៉ូសែន

សមីការរាង $(E)\ :\ y'+ay=0$

សមីការមានចម្លើយទូទៅ $y=Ae^{-ax}\ ,\ A\in IR$

IV. សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់១ មិនអូម៉ូសែន

សមីការរាង $(E)\ :\ y'+ay=P(x)$

- រកចម្លើយទូទៅ y_c នៃសមីការ $y'+ay=0$
- រកចម្លើយពិសេស y_p
- ចម្លើយទូទៅនៃសមីការគឺ $y=y_c+y_p$ ។

V. សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់១ មិនអូម៉ូសែន

ដោះស្រាយតាមវិធីបម្រែបម្រួលចំនួនថេរ

សមីការរាង $(E)\ :\ y'+ay=P(x)$

- រកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ $y'+ay=0$

សមីការមានចម្លើយទូទៅ $y=Ae^{-ax}$

- ប្តូរ A ទៅជា $A(x)$

គេបាន $y=A(x)\cdot e^{-ax}$

$$\Rightarrow \quad y'=A'(x)\cdot e^{-ax}-aA(x)\cdot e^{-ax}$$

គេបាន $(E):A'(x)e^{-ax}-aA(x)e^{-ax}$

$$+aA(x)e^{-ax}=P(x)$$

$$\Rightarrow \quad A'(x)\cdot e^{-ax}=P(x)$$

$$\Rightarrow \quad A'(x)=\frac{P(x)}{e^{-ax}}=P(x)\cdot e^{ax}$$

$$\Rightarrow \quad A(x)=\int P(x)\cdot e^{ax}dx+c$$

គេបាន $y=\left[\int P(x)\cdot e^{ax}dx+c\right]\times e^{-ax}$

ជាចម្លើយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E) ។

VI. សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់២ អូម៉ូសែន

សមីការរាង $(E)\ :\ ay''+by'+cy=0$

សមីការសម្គាល់ $ar^2+br+c=0$ និង $\Delta=b^2-4ac$

- បើ $\Delta>0$ សមីការមានឫសពីរផ្សេងគ្នា

$r_1=\alpha\ ,\ r_2=\beta$ សមីការមានចម្លើយទូទៅ

$$y=Ae^{\alpha x}+Be^{\beta x}\ ;\ A,B\in IR$$

- បើ $\Delta=0$ សមីការមានឫសឌុប $r_1=r_2=\alpha$

សមីការមានចម្លើយទូទៅ

$$y=(Ax+B)e^{\alpha x}\ ;\ A,B\in IR$$

- បើ $\Delta<0$ សមីការមានឫសជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់គ្នា

$r_{1,2}=\alpha\pm\beta i$ សមីការមានចម្លើយទូទៅ

$$y=(A\cos\beta x+B\sin\beta x)\cdot e^{\alpha x};A,B\in IR$$

VII. សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់២ មិនអូម៉ូសែន

សមីការរាង $(E)\ :\ ay''+by'+cy=P(x)$

- រកចម្លើយទូទៅ y_c នៃសមីការ $ay''+by'+cy=0$
- រកចម្លើយពិសេស y_p
- ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) គឺ $y=y_c+y_p$ ។

VIII. សមីការដឺក្រេទី២

សមីការរាង $ax^2+bx+c=0$ ដែល $a\neq 0$

តាមឌីសគ្រីមីណង់ $\Delta=b^2-4ac$

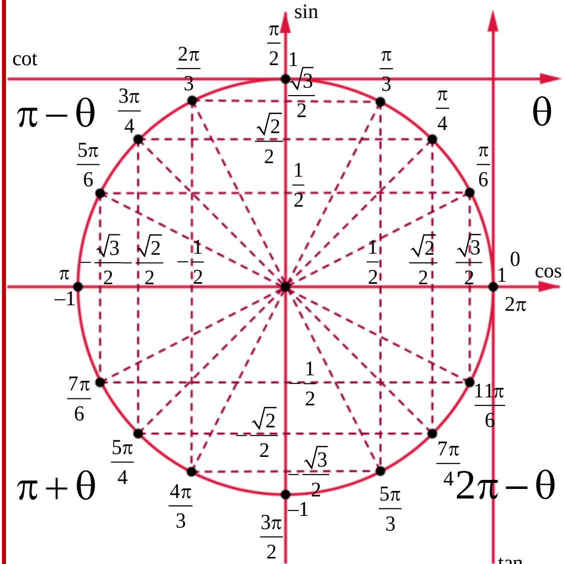
- សមីការមានឫសពីរ $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$
- សមីការមានឫសឌុប $x_1=x_2=-b/2a$
- សមីការមានឫសកុំផ្លិច $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

រូបមន្តគណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី ១២

ផលធៀបត្រីកោណមាត្រ

បង្រៀនដោយៈ សេង សុភាសិត វិ.សម្តេចឪ

រង្វង់ត្រីកោណមាត្រ

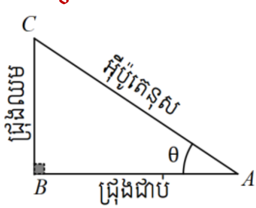


សញ្ញាអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

កាដ្រង់	sin	cos	tan	cot
I	+	+	+	+
II	+	–	–	–
III	–	–	+	+
IV	–	+	–	–

ផលធៀបត្រីកោណមាត្រ

- $\sin\theta = \dfrac{BC}{AC}$
- $\cos\theta = \dfrac{AB}{AC}$
- $\tan\theta = \dfrac{BC}{AB}$
- $\cot\theta = \dfrac{AB}{BC}$



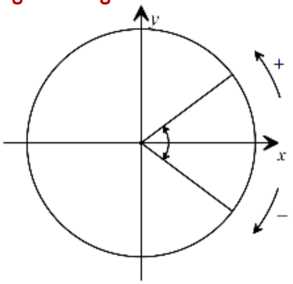
θ	ដឺក្រេ	sin	cos	tan	cot
0^{o}	0	0	1	0	$\|\|$
30^{o}	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45^{o}	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60^{o}	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90^{o}	$\frac{\pi}{2}$	1	0	$\|\|$	0
120^{o}	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
135^{o}	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	-1
150^{o}	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$
180^{o}	π	0	-1	0	$\|\|$
210^{o}	$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
225^{o}	$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
240^{o}	$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
270^{o}	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	$\|\|$	0
300^{o}	$\frac{5\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
315^{o}	$\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	-1
330^{o}	$\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$
360^{o}	2π	0	1	0	$\|\|$

រូបមន្តគណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី ១២

រូបមន្តត្រីកោណមាត្រ

បង្រៀនដោយៈ សេង សុភាសិត វិ.សម្តេចឪ

❖ រង្វាស់មុំដឺក្រេ និងរ៉ាដ្យង់



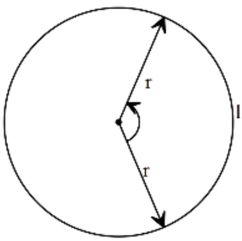
នៅក្នុងរង្វង់ត្រីកោណមាត្រគេយកវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{OP}$ និង $\overrightarrow{OP_o}$ ដើម្បីកំណត់មុំ។

- វ៉ិចទ័រវិលច្រាស់ទ្រនិចនាឡិកាបង្កើតបានមុំវិជ្ជមាន
- វ៉ិចទ័រវិលស្របទ្រនិចនាឡិកាបង្កើតបានមុំអវិជ្ជមាន
- $\overrightarrow{OP_o}$ និង $\overrightarrow{OP}$ កំណត់បានមុំ $\alpha + k\cdot 360^o \ (k\in\mathbb{Z})$
- មុំ α និង $\alpha + 360^o$ មានរង្វាស់មុំខុសគ្នាតែវ៉ិចទ័រ ដែលមានគល់ និងចុងដូចគ្នា។
- មួយរ៉ាដ្យង់ ជារង្វាស់មុំផ្ចិត ដែលស្កាត់ដោយធ្នូមួយ ដែលមានប្រវែងស្មើនឹងកាំនៃរង្វង់។ គេសរសេរ $1rd$

$$* \ 1^o = \frac{\pi}{180^o} \qquad * \ 1rd = \frac{180^o}{\pi}$$

$$* \ 180^o = \pi \qquad * \ 2\pi = 360^o$$

❖ ប្រវែងធ្នូ និងផ្ទៃក្រឡា



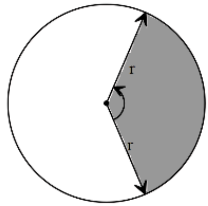
ផលធៀបសមាមាត្រ $\dfrac{l}{\text{បរិមាត្រ}} = \dfrac{\alpha}{2\pi}$

គេបាន $l = r\times\alpha$ ឯកតាប្រវែង

ដែល បរិមាត្ររង្វង់ $p = 2\pi r$

❖ ផ្ទៃក្រឡា

តាមផលធៀបសមាមាត្រ



$$\frac{A}{\text{ផ្ទៃក្រឡារង្វង់}} = \frac{\alpha}{2\pi}$$

$$A = \frac{\alpha}{2\pi}\times\text{ផ្ទៃក្រឡារង្វង់}$$

$$A = \frac{\alpha}{2\pi}\times\pi r^2 = \frac{1}{2}\alpha r^2$$

❖ រូបមន្តគ្រឹះ

- $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$
- $\tan\theta\times\cot\theta = 1$
- $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{1}{\cot\theta}$
- $\cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} = \dfrac{1}{\tan\theta}$
- $1+\tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$
- $1+\cot^2\theta = \dfrac{1}{\sin^2\theta}$
- $\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$
- $\csc\theta = \dfrac{1}{\sin\theta}$
- $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$
- $\csc^2\theta - \cot^2\theta = 1$

❖ ខួបអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

- $y = \sin ax$ និង $y = \cos ax$ មានខួប $p = \dfrac{2\pi}{|a|}$
- $y = \tan ax$ និង $y = \cot ax$ មានខួប $p = \dfrac{\pi}{|a|}$

❖ ដែនកំណត់

និយមន័យ ដែនកំណត់ គឺជាសំណុំនៃតម្លៃ x ដែលធ្វើឲ្យអនុគមន៍មានន័យ ឬកំណត់បាន។

- $f(x) = \sin x\,,\quad D = \{x \mid x\in\mathbb{R}\}$
- $f(x) = \cos x\,,\quad D = \{x \mid x\in\mathbb{R}\}$
- $f(x) = \tan x\,,\quad D = \{x \mid x\neq (2k+1)\dfrac{\pi}{2}\ ;\ k\in\mathbb{Z}\}$
- $f(x) = \cot x\,,\quad D = \{x \mid x\neq k\pi\ ;\ k\in\mathbb{Z}\}$

❖ លក្ខណៈខួប , $k \in \mathbb{Z}$

- $\sin\left(2k\pi + \theta\right) = \sin\theta$
- $\cos\left(2k\pi + \theta\right) = \cos\theta$
- $\tan\left(2k\pi + \theta\right) = \tan\theta$
- $\cot\left(2k\pi + \theta\right) = \cot\theta$

❖ រូបមន្តមុំផ្ទុយ

- $\sin(-\theta) = -\sin\theta$
- $\cos(-\theta) = \cos\theta$
- $\tan(-\theta) = -\tan\theta$
- $\cot(-\theta) = -\cot\theta$

❖ រូបមន្តមុំបន្ថែម

- $\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$
- $\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$
- $\tan(\pi - \theta) = -\tan\theta$
- $\cot(\pi - \theta) = -\cot\theta$

❖ មុំដែលមានផលសងស្មើ π

- $\sin(\pi + \theta) = -\sin\theta$
- $\cos(\pi + \theta) = -\cos\theta$
- $\tan(\pi + \theta) = \tan\theta$
- $\cot(\pi + \theta) = \cot\theta$

❖ រូបមន្តមុំបំពេញ

- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$
- $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot\theta$
- $\cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \tan\theta$

❖ រូបមន្តមុំមានផលសងស្មើ $\pi/2$

- $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos\theta$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin\theta$
- $\tan\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\cot\theta$
- $\cot\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\tan\theta$

❖ ករណីពិសេស , $k \in \mathbb{Z}$

- $\sin 0 = 0$
- $\sin\pi = 0$
- $\sin 2\pi = 0$
- $\sin\frac{\pi}{2} = 1$
- $\sin 2k\pi = 0$
- $\cos 0 = 1$
- $\cos\pi = -1$
- $\cos 2\pi = 1$
- $\cos\frac{\pi}{2} = 0$
- $\cos 2k\pi = 1$

❖ សមីការទូទៅ , $k \in \mathbb{Z}$

- $\sin x = \sin\alpha \quad \Rightarrow \quad x = \left[\begin{array}{l} \alpha + 2k\pi \\ \pi - \alpha + 2k\pi \end{array}\right.$
- $\cos x = \cos\alpha \quad \Rightarrow \quad x = \left[\begin{array}{l} \alpha + 2k\pi \\ -\alpha + 2k\pi \end{array}\right.$
- $\tan x = \tan\alpha \quad \Rightarrow \quad x = \alpha + k\pi$
- $\cot x = \cot\alpha \quad \Rightarrow \quad x = \alpha + k\pi$

❖ ករណីពិសេស , $k \in \mathbb{Z}$

- $\sin k\pi = 0 \quad \Rightarrow x = k\pi$
- $\cos k\pi = 0 \quad \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$
- $\tan k\pi = 0 \quad \Rightarrow x = k\pi$
- $\cot k\pi = 0 \quad \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

❖ រូបមន្តផលបូក និងផលដក

- $\cos(a + b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$
- $\cos(a - b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$
- $\sin(a + b) = \sin a\cos b + \sin b\cos a$
- $\sin(a - b) = \sin a\cos b - \sin b\cos b$
- $\tan(a + b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a\tan b}$
- $\tan(a - b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a\tan b}$
- $\cot(a + b) = \dfrac{\cot a\cot b - 1}{\cot b + \cot a}$
- $\cot(a - b) = \dfrac{\cot a\cot b + 1}{\cot b - \cot a}$

❖ រូបមន្តមុំឌុប

- $\sin 2a = 2\sin a\cos a$
- $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$
  $= 1 - 2\sin^2 a$
  $= \cos^2 a - \sin^2 a$
- $\tan 2a = \dfrac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$

❖ កន្លះមុំ

- $\sin a = 2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}$
- $\cos^2\frac{a}{2} = \frac{1+\cos a}{2}$
- $\sin^2\frac{a}{2} = \frac{1-\cos a}{2}$
- $\tan^2\frac{a}{2} = \frac{1-\cos a}{1+\cos a}$
- $\tan\frac{a}{2} = \frac{\sin a}{1+\cos a} = \frac{1-\cos a}{\sin a} = \csc a - \cot a$

❖ ករណីតាង $\tan\frac{a}{2} = t$ គេបាន

- $\cos a = \frac{1-t^2}{1+t^2}$
- $\sin a = \frac{2t}{1+t^2}$
- $\tan a = \frac{2t}{1-t^2}$
- $\cot a = \frac{1-t^2}{2t}$

❖ រូបមន្តបីមុំ, បួនមុំ និងប្រាំមុំ

- $\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a$
- $\sin 3a = -4\sin^3 a + 3\sin a$
- $\tan 3a = \frac{3\tan a - \tan^3 a}{1-3\tan^2 a}$
- $\cos 4a = 8\cos^4 a - 8\cos^2 a + 1$
- $\sin 4a = 4\sin a\cos a - 8\sin^3 a\cos a$
- $\tan 4a = \frac{4\tan a - 4\tan^3 a}{1-6\tan^2 a + \tan^4 a}$
- $\cos 5a = 16\cos^5 a - 20\cos^3 a + 5\cos a$
- $\sin 5a = 5\sin a - 20\sin^3 a + 16\sin^5 a$
- $\tan 5a = \frac{5\tan^5 a - 10\tan^3 a + 5\tan a}{1-10\tan^2 a + 5\tan^4 a}$

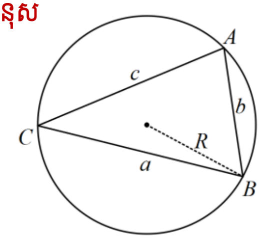
❖ ស្វ័យគុណនៃត្រីកោណមាត្រ

- $\sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}$
- $\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}$
- $\sin^3 a = \frac{3\sin a - \sin 3a}{4}$
- $\cos^3 a = \frac{3\cos a + \cos 3a}{4}$
- $\sin^4 a = \frac{3-4\cos 2a + \cos 4a}{8}$
- $\cos^4 a = \frac{3+4\cos 2a + \cos 4a}{8}$
- $\sin^5 a = \frac{10\sin a - 5\sin 3a + \sin 5a}{16}$
- $\cos^5 a = \frac{10\cos a + 5\cos 3a + \cos 5a}{16}$

❖ ផលបូក ផលដក និងផលគុណនៃត្រីកោណមាត្រ

- $\sin A + \sin B = 2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$
- $\sin A - \sin B = 2\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)$
- $\cos A + \cos B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$
- $\cos A - \cos B = -2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)$
- $\sin A\sin B = \frac{1}{2}\left[\cos(A-B) - \cos(A+B)\right]$
- $\cos A\cos B = \frac{1}{2}\left[\cos(A-B) + \cos(A+B)\right]$
- $\sin A\cos B = \frac{1}{2}\left[\sin(A-B) + \sin(A+B)\right]$

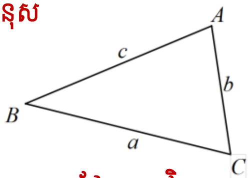
❖ ទ្រឹស្តីស៊ីនុស



ត្រីកោណ ABC ចារឹកក្នុងរង្វង់ដែលមានកាំ R

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

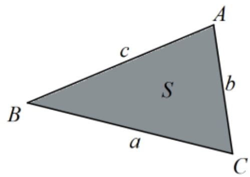
❖ ទ្រឹស្តីកូស៊ីនុស



ត្រីកោណ ABC ដែលមានវិមាត្រ a, b, c

- $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$
- $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$
- $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

❖ ផ្ទៃក្រឡា

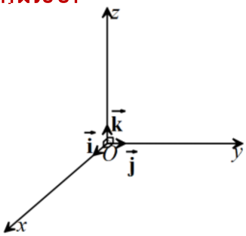


$$S = \frac{1}{2}ab\sin A = \frac{1}{2}ac\sin B = \frac{1}{2}bc\sin A$$

រូបមន្តគណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី ១២
វ៉ិចទ័រក្នុងលំហ

បង្រៀនដោយ៖ សេង សុភាសិត វិ.សម្ដេចឪ

❖ តម្រុយកងលំហ



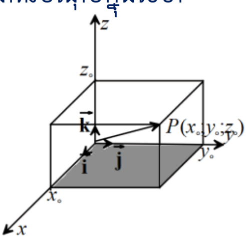
តម្រុយក្នុងលំហ គឺគ្រប់ចតុធាតុ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ដែល O ជាគល់តម្រុយ និង $\vec{i};\vec{j};\vec{k}$ ជាវ៉ិចទ័រទីតាំងដែលស្ថិតនៅក្នុងតម្រុយតែមួយ។

- $(x'x)$ ហៅថាអ័ក្សអាប់ស៊ីស
- $(y'y)$ ហៅថាអ័ក្សអរដោនេ
- $(z'z)$ ហៅថាអ័ក្សកូត
- $\vec{i};\vec{j};\vec{k}$ ហៅថាវ៉ិចទ័រឯកតា

<u>ចំណាំ៖</u> - $\vec{i}\cdot\vec{j}=0$; $\vec{j}\cdot\vec{k}=0$; $\vec{k}\cdot\vec{i}=0$

- $|\vec{i}|=|\vec{j}|=|\vec{k}|=1$

❖ កូអរដោនេចំណុចក្នុងលំហ



នៅក្នុងតម្រុយ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ បើគេមានចំណុច $P(x,y,z)$ ដែល $\overrightarrow{OP}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ នោះគេបាន (x,y,z) ហៅថាកូអរដោនេនៃចំណុច P

❖ កូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រក្នុងលំហ

បើ $A(x_A,y_A,z_A)$ និង $B(x_B,y_B,z_B)$ ជាពីរចំណុចនៅក្នុងតម្រុយ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

គេបាន $\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A,y_B-y_A,z_B-z_A)$

❖ ប្រវែងនៃវ៉ិចទ័រក្នុងលំហ

- បើ $\vec{u}=(x,y,z)$ ជាវ៉ិចទ័រក្នុងតម្រុយ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេបានណមវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ គឺ $|\vec{u}|=\sqrt{x'^2+y^2+z^2}$
- បើ $\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A,y_B-y_A,z_B-z_A)$ គេបាន

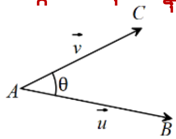
$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$$

❖ ចម្ងាយរវាងពីរចំណុចក្នុងលំហ

បើ $A(x_A,y_A,z_A)$ និង $B(x_B,y_B,z_B)$ ជាពីរចំណុចនៅក្នុងលំហ គេបានចម្ងាយពី A ទៅ B កំណត់ដោយ

$$d(A,B)=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$$

❖ ផលគុណស្កាលែពីរវ៉ិចទ័រក្នុងលំហ



បើ $\vec{u}=(x,y,z)$ និង $\vec{v}=(x',y',z')$ ជាពីរវ៉ិចទ័រក្នុងតម្រុយ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ និង $\theta=(\vec{u},\vec{v})$ គេបាន

- $\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'+zz'$
- $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\theta \Rightarrow \cos\theta=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$
- បើ $\vec{u}\cdot\vec{v}=0 \Leftrightarrow \vec{u}\perp\vec{v}$ និងបើ $\vec{u}\cdot\vec{v}\neq 0 \Leftrightarrow \vec{u}\not\perp\vec{v}$
- ចំពោះបីចំណុច A,B និង C ក្នុងលំហគេបាន៖

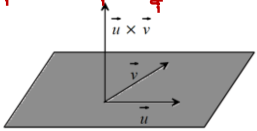
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cdot\cos\theta$$

<u>ចំណាំ៖</u> -បើ $\theta=0^o \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|$

-បើ $\theta=90^o \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$

-បើ $\theta=180^o \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|$

❖ ផលគុណនៃពីរវ៉ិចទ័រក្នុងលំហតាមកូអរដោនេ



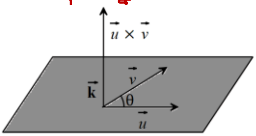
បើ $\vec{u}=(x,y,z)$ និង $\vec{v}=(x',y',z')$ ជាពីរវ៉ិចទ័រក្នុងតម្រុយ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ មានទិសដៅវិជ្ជមាន

គេបាន $\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x & y & z\\ x' & y' & z'\end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} x & z \\ x' & z' \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$= (yz'-y'z)\vec{i} - (xz'-x'z)\vec{j} + (xy'-x'y)\vec{k}$$

❖ ផលគុណនៃពីរវ៉ិចទ័រក្នុងលំហតាមធរណីមាត្រ



បើ $\vec{u}=(x,y,z)$ និង $\vec{v}=(x',y',z')$ ជាពីរវ៉ិចទ័រមិនសូន្យក្នុងតម្រុយ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ។ ផលគុណនៃ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ កំណត់ដោយ $\vec{u}\times\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\sin\theta\cdot\vec{k}$ និងម៉ូឌុល $|\vec{u}\times\vec{v}| = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\sin\theta$ ។

លក្ខណៈ:
- $\vec{u}\times\vec{v} = -(\vec{v}\times\vec{u})$
- $\vec{u}\times(\vec{v}+\vec{w}) = (\vec{u}\times\vec{v}) + (\vec{u}\times\vec{w})$
- $c(\vec{u}\times\vec{v}) = (c\vec{u})\times\vec{v} = \vec{u}\times(c\vec{v})$
- $\vec{u}\times\vec{0} = \vec{0}\times\vec{u} = \vec{0}$
- $\vec{u}\times\vec{u} = \vec{0}$
- $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}) = (\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w}$

ចំណាំ៖
- បើ $\vec{u}\times\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{u}\parallel\vec{v}$
- បើ $\vec{u}\times\vec{v} \neq \vec{0} \Leftrightarrow \vec{u}\nparallel\vec{v}$
- វ៉ិចទ័រ $\vec{u}\times\vec{v}$ កែងនឹងវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ ផងនិង $\vec{v}$ ផង
- $(\vec{u}\times\vec{v})\perp\vec{u}$; $(\vec{u}\times\vec{v})\perp\vec{v}$

❖ ផលគុណចម្រុះនៃបីវ៉ិចទ័រក្នុងលំហ

បើ $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$; $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$ និង $\vec{w}=(w_1,w_2,w_3)$ នៅក្នុងតម្រុយ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

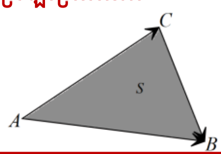
ផលគុណចម្រុះនៃបីវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$, $\vec{v}$ និង $\vec{w}$ កំណត់ដោយ៖

$$\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

$$= u_1\begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} - u_2\begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} + u_3\begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix}$$

ចំណាំ៖ $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}) = (\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w}$ ។

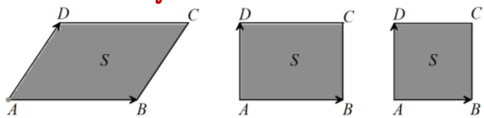
❖ ផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ



$$S = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{CA}\times\overrightarrow{CB}|$$

ចំណាំ៖ ត្រូវប្រើផលគុណពីរវ៉ិចទ័រចេញពីកំពូលតែមួយ

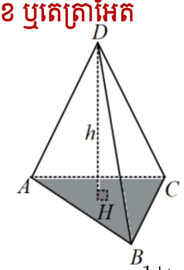
❖ ផ្ទៃក្រឡាប្រលេឡូក្រាម-ចតុកោណកែង-ការេ



$$S_{ABCD} = |\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}|$$
$$= |\overrightarrow{CB}\times\overrightarrow{CD}| = |\overrightarrow{DA}\times\overrightarrow{DC}|$$

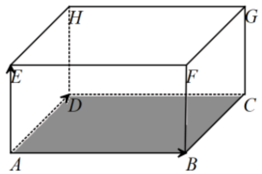
ចំណាំ៖ ត្រូវប្រើផលគុណពីរវ៉ិចទ័រចេញពីកំពូលតែមួយ

❖ មាឌចតុមុខ ឬតេត្រាអែត



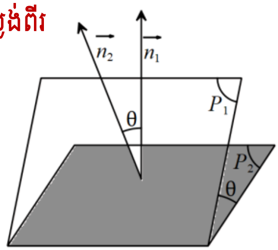
- តាមផលគុណចម្រុះ $V = \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AD}\right|$
- តាមធរណីមាត្រ $V = \frac{1}{3}S_{ABC}\cdot h$

❖ មាឌប្រលេពីប៉ែត



តាមផលគុណចម្រុះ $V = \left|\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right)\cdot\overrightarrow{AE}\right|$

❖ មុំរវាងប្លង់ពីរ

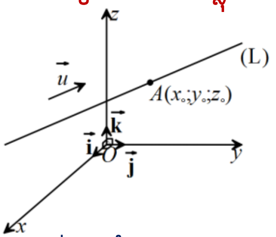


បើប្លង់ (P_1) មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}_1$ និងប្លង់ (P_2) មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}_2$

- ប្លង់ទាំងពីរកែងគ្នាបើ $\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2 = 0$

- ប្លង់ទាំងពីរស្របគ្នាបើ $\vec{n}_1 = k\vec{n}_2$ ដែល $k \neq 0$
- មុំរវាងប្លង់ទាំងពីរ $\cos\theta = \dfrac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}$

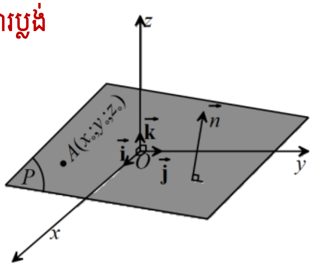
❖ សមីការប៉ារ៉ាមែត្រ និងសមីការឆ្លុះនៃបន្ទាត់



បើបន្ទាត់ L កាត់តាមចំណុច $A(x_o, y_o, z_o)$ ហើយស្រប នឹងវ៉ិចទ័រ $\vec{u} = (a, b, c)$ នោះយើងបាន ៖

- សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត $(L): \begin{cases} x = x_o + at \\ y = y_o + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$, $t \in IR$
- សមីការឆ្លុះ $(L): \dfrac{x - x_o}{a} = \dfrac{y - y_o}{b} = \dfrac{z - z_o}{c}$

❖ សមីការប្លង់



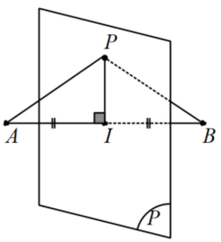
បើប្លង់ P កាត់តាមចំណុច $A(x_o, y_o, z_o)$ ហើយកែងនឹងវ៉ិចទ័រ $\vec{n} = (a, b, c)$ នោះសមីការស្តង់ដាប្លង់ (P) ៖

$(P): a(x - x_o) + b(y - y_o) + c(z - z_o) = 0$ ។

សមីការទូទៅ $(P): ax + by + cz + d = 0$

ដែល $d = -ax_o - by_o - cz_o$ ។

❖ សមីការប្លង់មេដ្យាទ័រ



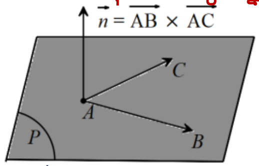
ប្លង់មេដ្យាទ័រនៃអង្កត់ $[AB]$ កំណត់ដោយសមីការ

$(P): a(x - x_o) + b(y - y_o) + c(z - z_o) = 0$

ដែលមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n} = \overrightarrow{AB}$ និងមានចំណុចកាត់ជាចំណុចកណ្តាលអង្កត់ $[AB]$ តាងដោយ

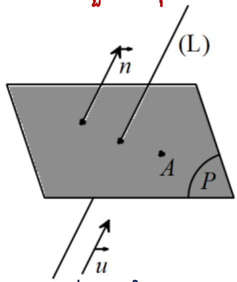
$$I(x_o, y_o, z_o) = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2}\right)$$

❖ ប្លង់កាត់តាមបីចំណុចរត់មិនត្រង់គ្នា



សមីការប្លង់ (P) កាត់តាមបីចំណុច A, B, C រត់មិនត្រង់គ្នា គឺមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ និងយកចំណុចកាត់ជាចំណុច A (ឬ B ឬ C)។

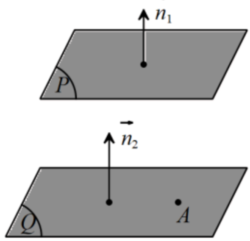
❖ សមីការប្លង់កាត់តាមមួយចំណុចហើយស្របបន្ទាត់



សមីការប្លង់ (P) កាត់តាមចំណុច $A(x_o, y_o, z_o)$ ហើយប្លង់ (P) ស្របនឹងបន្ទាត់ (L) ដែលមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u} = (a, b, c)$ គេបានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}$ របស់ប្លង់ (P) ស្របនឹងវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u}$ នោះគេយក $\vec{n} = \vec{u}$ ។

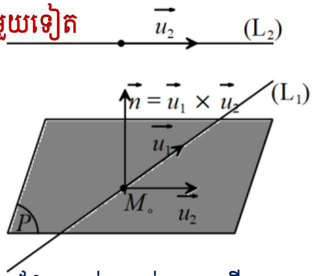
សមីការបន្ទាត់គឺ $(L) \begin{cases} x = x_o + at \\ y = y_o + bt \; ; t \in \mathbb{R} \\ z = z_o + ct \end{cases}$ ។

❖ សមីការប្លង់កាត់តាមចំណុចមួយហើយស្របនឹងប្លង់មួយទៀត



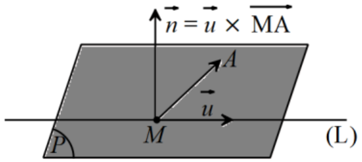
សមីការប្លង់ (Q) ដែលកាត់តាមចំណុច $A(x_o,y_o,z_o)$ និងមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}_2$ ហើយស្របនឹងប្លង់ (P) ដែលមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}_1=(a,b,c)$ គេបាន $\vec{n}_2 \parallel \vec{n}_1$ គេយក $\vec{n}_2=\vec{n}_1$ ។ សមីការប្លង់កំណត់ដោយ $(Q): a(x-x_o)+b(y-y_o)+c(z-z_o)=0$ ។

❖ សមីការប្លង់ដែលកាត់តាមបន្ទាត់មួយ ហើយស្របនឹងបន្ទាត់មួយទៀត



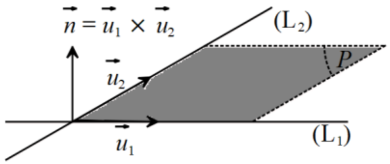
ប្លង់ (P) ដែលកាត់បន្ទាត់ (L_1) ហើយស្របនឹងបន្ទាត់ (L_2) ដែលបន្ទាត់ទាំងពីរមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសរៀងគ្នា $\vec{u}_1=(a_1,b_1,c_1)$ និង $\vec{u}_2=(a_2,b_2,c_2)$ គេត្រូវរើសយកចំណុច $M_o(x_o,y_o,z_o)\in(L_1)$ ហើយ M_o នេះក៏ជាចំណុចកាត់របស់ប្លង់ (P) ផងដែរ ហើយប្លង់មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}=\vec{u}_1\times\vec{u}_2=(a,b,c)$ ។ សមីការប្លង់ (P): $a(x-x_o)+b(y-y_o)+c(z-z_o)=0$ ។

❖ សមីការប្លង់កំណត់ដោយបន្ទាត់មួយ និងចំណុចមួយ



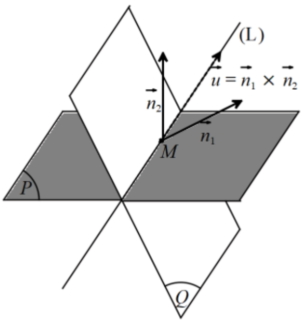
សមីការប្លង់ (P) ដែលកំណត់ដោយបន្ទាត់ (L) និងកាត់តាម $A(x_o,y_o,z_o)$ គឺមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}=\vec{u}\times\overrightarrow{MA}$ ដែលយកចំណុច $M\in(L)$ គេបានប្លង់ $(P): a(x-x_o)+b(y-y_o)+c(z-z)=0$ ។

❖ សមីការប្លង់នៃបន្ទាត់ពីរប្រសព្វគ្នា



ដើម្បីដោះស្រាយរកសមីការប្លង់ដែលជាប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ពីរ (L_1) និង (L_2) ដែលបន្ទាត់ទាំងពីរមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសរៀងគ្នា $\vec{u}_1$ និង $\vec{u}_2$ គេត្រូវរកចំណុចកាត់នៃប្លង់ដែលជាកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ទាំងពីរតាងដោយ $A(x_o,y_o,z_o)$ និងរកវ៉ិចណរម៉ាល់ $\vec{n}=\vec{u}_1\times\vec{u}_2$ ។ សមីការប្លង់កំណត់ដោយ $(P): a(x-x_o)+b(y-y_o)+c(z-z_o)=0$ ។

❖ សមីការបន្ទាត់កំណត់ដោយប្លង់ពីរប្រសព្វគ្នា



សមីការបន្ទាត់ដែលជាប្រសព្វរវាងប្លង់ពីរ (P) និង (Q) ដែលមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់រៀងគ្នា $\vec{n}_1$ និង $\vec{n}_2$ កំណត់ដោយៈ

- ករណីបន្ទាត់ស្គាល់ចំណុចកាត់ $M(x_o,y_o,z_o)$

  សមីការរាង $(L)\begin{cases} x=x_o+at \\ y=y_o+bt \quad ; t\in\mathbb{R} \\ z=z_o+ct \end{cases}$

  បន្ទាត់មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2$ ។

- ករណីបន្ទាត់មិនស្គាល់ចំណុចកាត់

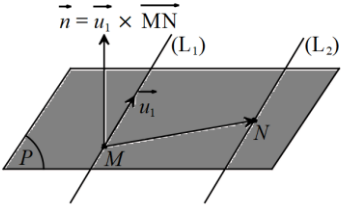
  បើសមីការប្លង់ $\begin{cases}(P): ax+by+cz+d=0 \\ (Q): a'x+b'y+c'z+d=0\end{cases}$

  ត្រូវតាងអថេរណាមួយក្នុងចំណោមអថេរទាំងបី $x;y;z$ ទៅជាតម្លៃប៉ារ៉ាម៉ែត្រមួយ រួចដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការថ្មីជាប់តម្លៃប៉ារ៉ាម៉ែត្រដែលបានតាង។

  <u>សម្គាល់</u>ៈ គេនិយមតាង $z=t$; $t\in\mathbb{R}$ គេបាន

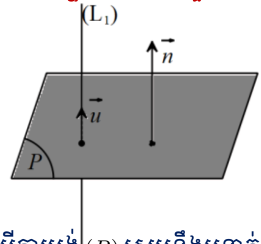
$$\begin{cases} ax+by+ct+d=0 \\ a'x+b'y+c't+d=0 \end{cases}$$

❖ សមីការប្លង់កំណត់ដោយបន្ទាត់ពីរស្របគ្នា



សមីការប្លង់ (P) កំណត់ដោយបន្ទាត់ $(L_1)\parallel(L_2)$ គឺមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}=\vec{u}\times\overrightarrow{MN}=(a,b,c)$ និង យកចំណុចកាត់ M ដែល $M\in(L_1)$ និង $N\in(L_2)$ គេបាន (P): $a(x-x_o)+b(y-y_o)+c(z-z_o)=0$ ។

❖ សមីការបន្ទាត់កាត់តាមមួយចំណុចហើយកែងនឹងប្លង់



សមីការប្លង់ (P) ស្របនឹងបន្ទាត់ (L) ដែលមានវ៉ិចទ័រ ប្រាប់ទិស $\vec{u}=(a,b,c)$ ហើយកាត់តាមចំណុច $A(x_o,y_o,z_o)$ នោះវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់គឺ $\vec{n}=\vec{u}$ គេបាន $(P): a(x-x_o)+b(y-y_o)+c(z-z_o)=0$ ។

❖ ចម្ងាយពីចំណុចមួយទៅប្លង់ក្នុងលំហ

បើប្លង់ (P) មានសមីការ $(P): ax+by+cz+d=0$ នោះចម្ងាយពីចំណុច $A(x_o,y_o,z_o)$ ទៅប្លង់ (P) គឺ

$$d(A,P)=\frac{|ax_o+by_o+cz_o+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$ ។

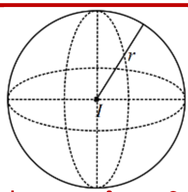
❖ ចម្ងាយពីចំណុចមួយទៅបន្ទាត់ក្នុងលំហ

ចម្ងាយពីចំណុច A ទៅបន្ទាត់ (L) ដែលមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u}$ និង $M\in(L)$ ហើយ $A\notin(L)$ គេបានចម្ងាយពី A ទៅបន្ទាត់ (L) គឺ $d(A,L)=\dfrac{|\overrightarrow{MA}\times\vec{u}|}{|\vec{u}|}$ ។

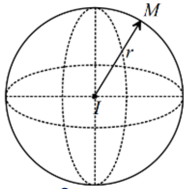
❖ សមីការស្វ៊ែ

សមីការស្វ៊ែ (S) ដែលមានផ្ចិត (a,b,c) និងកាំ r គេបាន

- ទម្រង់ស្តង់ដា $(S): (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$
- ទម្រង់ទូទៅ $x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0$

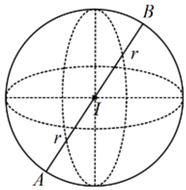


❖ សមីការស្វ៊ែកាត់តាមមួយចំណុចនិងស្គាល់ផ្ចិត



សមីការស្វ៊ែ (S) មានផ្ចិត $I(a,b,c)$ និងកាត់តាមចំណុច M គេបានកាំស្វ៊ែ (S) ស្មើ $r=|\overrightarrow{IM}|$ កំណត់ដោយ៖ $(S):(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$ ។

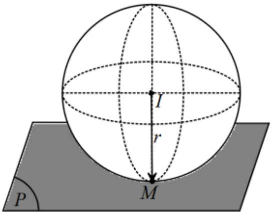
❖ សមីការស្វ៊ែមានពីរចំណុចជាអង្កត់ផ្ចិត



ស្វ៊ែមានអង្កត់ផ្ចិត AB នោះស្វ៊ែ (S) មានកាំ $r=\dfrac{AB}{2}=IA=IB$ និងផ្ចិត I ជាចំណុចកណ្ដាល AB គឺ $I=(a,b,c)=\left(\dfrac{x_A+y_B}{2},\dfrac{y_A+y_B}{2},\dfrac{z_A+z_B}{2}\right)$

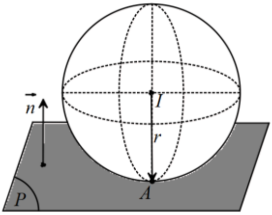
សមីការស្វ៊ែ $(S):(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$ ។

❖ សមីការស្វ៊ែដោយស្គាល់ផ្ចិតនិងប៉ះប្លង់មួយ



សមីការស្វ៊ែមានផ្ចិត $I(a,b,c)$ នឹងប៉ះប្លង់ (P) ដែលមានសីការ $ax+by+cz+d=0$ គេបានកាំស្វ៊ែ (S) គឺ $r=d(I,P)=\dfrac{|ax_I+by_I+cz_I+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ សមីការស្វ៊ែ គឺ $(S):(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$ ។

❖ **សមីការស្វ៊ែដោយស្គាល់កាំនិងប៉ះប្លង់ត្រង់មួយចំណុច**



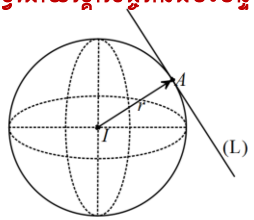
សមីការស្វ៊ែ (S) ដោយស្គាល់កាំ r ហើយប៉ះនឹងប្លង់ (P) មួយមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec n=(a,b,c)$ ត្រង់ចំណុច $A(x_A,y_A,z_A)$ គេបាន $\overrightarrow{IA}\parallel\vec n \Leftrightarrow \overrightarrow{IA}=t\cdot\vec n\;;t\in\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow r=|\overrightarrow{IA}|=|t|\cdot|\vec n| \Rightarrow t=\pm\frac{r}{|\vec n|}$$

ម្យ៉ាងទៀត $\overrightarrow{IA}=t\cdot\vec n \Leftrightarrow \begin{cases}x_A-x_I=at\\ y_A-y_I=bt \quad (1)\\ z_A-z_I=ct\end{cases}$

នឹងយក $t=\pm\frac{r}{|\vec n|}$ ទៅក្នុងសមីការ (1) នោះគេអាចកំណត់ផ្ចិត $I\left(x_I,y_I,z_I\right)$ នៃស្វ៊ែ (S) កំណត់ដោយ $(S):(x-x_I)^2+(y-y_I)^2+(z-z_I)^2=r^2$ ។

❖ **សមីការស្វ៊ែដោយស្គាល់ផ្ចិតនិងប៉ះបន្ទាត់ត្រង់មួយចំណុច**



សមីការស្វ៊ែ $(S):(x-a)^2+(y-a)^2+(z-a)^2=r^2$ ដោយស្គាល់ផ្ចិត $I(a,b,c)$ និងប៉ះបន្ទាត់ (L) ត្រង់ចំណុច $A(x_A,y_A,z_A)$ គេបានកាំស្វ៊ែគឺជាចម្ងាយពីផ្ចិត I ទៅបន្ទាត់ (L) គឺ $r=d(I,L)$ ។

❖ **ចម្ងាយរវាងពីរបន្ទាត់ក្នុងលំហ**

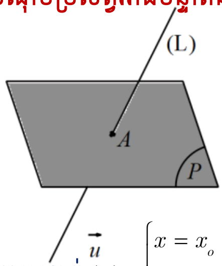
គេមានបន្ទាត់ $(L_1):\begin{cases}x=x_1+at\\ y=y_1+bt\;;t\in\mathbb{R}\\ z=z_1+ct\end{cases}$

និងបន្ទាត់ $(L_2):\begin{cases}x=x_2+a's\\ y=y_2+b's\;;s\in\mathbb{R}\\ z=z_2+c's\end{cases}$

ដែលយក $M\in(L_1)$ និង $N\in(L_2)$ ហើយមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសរៀងគ្នា $\vec u_1$ និង $\vec u_2$ គេបាន

$$d(L_1,L_2)=\frac{|\overrightarrow{MN}\cdot(\vec u_1\times\vec u_2)|}{|\vec u_1\times\vec u_2|}$$ ។

❖ **កូអរដោនេចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់និងប្លង់**



គេមានសមីការបន្ទាត់ $(L):\begin{cases}x=x_o+at\\ y=y_o+bt\;;t\in\mathbb{R}\\ z=z_o+ct\end{cases}$

និងប្លង់ $(P):Ax+By+Cz+D=0$ ។

បន្ទាត់ (L) ប្រសព្វប្លង់ (P) គេបានសមីការៈ

$$A(x_o+at)+B(y_o+bt)+C(z_o+ct)+D=0 \quad (1)$$

ដោយដោះស្រាយសមីការ (1) ដើម្បីរកតម្លៃ t រួចយកតម្លៃ t ដែលរកឃើញ ទៅជំនួសក្នុងបន្ទាត់ (L) ដើម្បីបានកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វ។

❖ **ចម្ងាយពីប្លង់ទៅប្លង់ក្នុងលំហ**

គេមានសមីការប្លង់ពីរ $(P):ax+by+cz+d=0$

និង $(Q):a'x+b'y+c'z+d'=0$ ។

- បើប្លង់ (P) និង (Q) មិនស្របគ្នា មានន័យថាប្លង់ទាំងពីរកាត់គ្នា នោះចម្ងាយពីប្លង់ (P) ទៅប្លង់ (Q) គឺស្មើ 0 $d(Q,P)=0$ ។
- បើប្លង់ (P) និង (Q) ស្របគ្នា គេបាន $\vec u_L\parallel\vec u_Q$

សមមូល $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=k\;;k\in\mathbb{R}$

គេបាន $a=a'k\;;\;b=b'k\;;\;c=c'k$

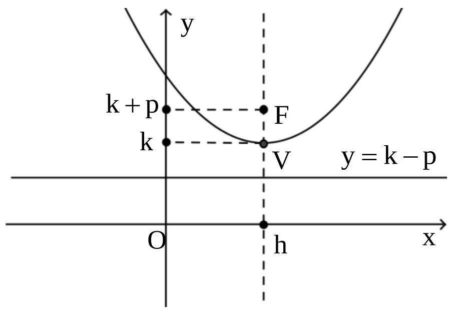
នាំឲ្យ $\begin{cases}(P):a'x+b'y+c'z+\frac{d}{k}=0\\ (Q):a'x+b'y+c'z+d'=0\end{cases}$

គេបាន $d(P,Q)=\dfrac{\left|\frac{d}{k}-d'\right|}{\sqrt{(a')^2+(b')^2+(c')^2}}$ ។

រូបមន្តគណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី ១២
កោនិច - ប៉ារ៉ាបូល
បង្រៀនដោយ៖ សេង សុភាសិត វិ.សម្ដេចឪ

I. ប៉ារ៉ាបូលដែលមានអ័ក្សឆ្លុះឈរ

❖ ករណីប៉ារ៉ាបូលមានកំពូលខុសពីគល់ O



- សមីការស្តង់ដារាង $(x-h)^2 = 4p(y-k)$
- កំពូល $V(h,k)$
- កំណុំ $F(h,k+p)$
- សមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិស $\Delta : y = k - p$
- សមីការអ័ក្សឆ្លុះឈរ $x = h$

❖ ករណីប៉ារ៉ាបូលមានកំពូលត្រង់គល់ O

មានន័យថា $h = 0$ និង $k = 0$ គេបាន

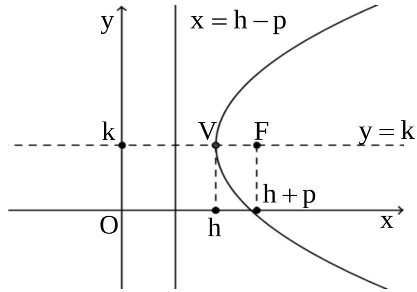
- សមីការស្តង់ដារាង $x^2 = 4py$
- កំពូល $O(0\,,\,0)$
- កំណុំ $F(0\,,\,p)$
- សមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិស $\Delta : y = -p$
- សមីការអ័ក្សឆ្លុះ $x = 0$

<u>សំគាល់</u>

- បើ $p > 0$ នោះប៉ារ៉ាបូលបែរភាពផតរកទិស $y > 0$
- បើ $p < 0$ នោះប៉ារ៉ាបូលបែរភាពផតរកទិស $y < 0$

II. ប៉ារ៉ាបូលដែលមានអ័ក្សឆ្លុះដេក

❖ ករណីប៉ារ៉ាបូលមានកំពូលខុសពីគល់ O



- សមីការស្តង់ដារាង $(y-k)^2 = 4p(x-h)$
- កំពូល $V(h,k)$
- កំណុំ $F(h+p,k)$
- សមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិស $\Delta : x = h - p$
- សមីការអ័ក្សឆ្លុះដេក $y = k$

❖ ករណីប៉ារ៉ាបូលមានកំពូលត្រង់គល់ O

មានន័យថា $h = 0$ និង $k = 0$ គេបាន

- សមីការស្តង់ដារាង $y^2 = 4px$
- កំពូល $O(0\,,\,0)$
- កំណុំ $F(p\,,\,0)$
- សមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិស $\Delta : x = -p$
- សមីការអ័ក្សឆ្លុះ $y = 0$

<u>សំគាល់</u>

- បើ $p > 0$ នោះប៉ារ៉ាបូលបែរភាពផតរកទិស $x > 0$
- បើ $p < 0$ នោះប៉ារ៉ាបូលបែរភាពផតរកទិស $x < 0$

III. សមីការទូទៅនៃប៉ារ៉ាបូល

- ប៉ារ៉ាបូលមានអ័ក្សឆ្លុះឈរ

  សមីការទូទៅរាង $Ax^2 + Cx + Dy + E = 0$

- ប៉ារ៉ាបូលមានអ័ក្សឆ្លុះដេក

  សមីការទូទៅរាង $By^2 + Cy + Dx + E = 0$

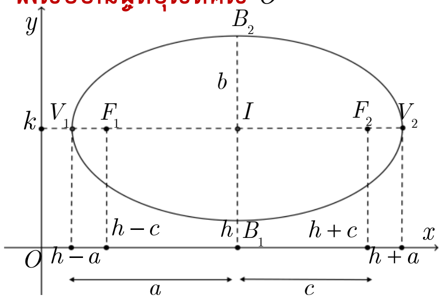
រូបមន្តគណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី ១២

កោនិច - អេលីប

បង្រៀនដោយៈ សេង សុភាសិត វិ.សម្តេចឪ

I. អេលីបដែលមានអ័ក្សធំដេក និងអ័ក្សតូចឈរ

❖ អេលីបមានផ្ចិតខុសពីគល់ O



- សមីការស្តង់ដា $\dfrac{(x-h)^2}{a^2}+\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$
- ផ្ចិត $I(h\ ,\ k)$
- កំពូល $V_1(h-a,k)$ និង $V_2(h+a,k)$
- កំណុំ $F_1(h-c,\ k)$ និង $F_2(h+c,k)$
- ប្រវែងអ័ក្សធំស្មើ $2a$ និង ប្រវែងអ័ក្សតូចស្មើ $2b$
- ចំណុចប្រសព្វអ័ក្សតូច $B_1(\mathrm{h,k-b});\mathrm{B}_2(\mathrm{h,k+b})$
- ដែល $a>b>0$ និង $c^2=a^2-b^2$

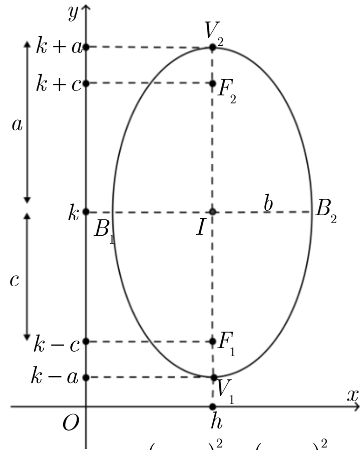
❖ អេលីបមានផ្ចិតត្រង់គល់ O

មានន័យថា $h=0$ និង $k=0$ គេបាន

- សមីការស្តង់ដា $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$
- ផ្ចិត $O(0\ ,\ 0)$
- កំពូល $V_1(-a,\ 0)$ និង $V_2(a,0)$
- កំណុំ $F_1(-c,\ 0)$ និង $F_2(c\ ,\ 0)$
- ចំណុចប្រសព្វអ័ក្សតូច $B_1(0,-\mathrm{b});\mathrm{B}_2(0,\ \mathrm{b})$
- ដែល $a>b>0\ ,\ c^2=a^2-b^2$

II. អេលីបដែលមានអ័ក្សធំឈរ និងអ័ក្សតូចដេក

❖ អេលីបមានផ្ចិតខុសពីគល់ O



- សមីការស្តង់ដា $\dfrac{(x-h)^2}{b^2}+\dfrac{(y-k)^2}{a^2}=1$
- ផ្ចិត $I(h\ ,\ k)$
- កំពូល $V_1(h\ ,\ k-a)$ និង $V_2(h\ ,\ k+a)$
- កំណុំ $F_1(h\ ,\ k-c)$ និង $F_2(h\ ,\ k+c)$
- ប្រវែងអ័ក្សធំស្មើ $2a$ និង ប្រវែងអ័ក្សតូចស្មើ $2b$
- ចំណុចប្រសព្វអ័ក្សតូច $B_1(\mathrm{h}-\mathrm{b},\ \mathrm{k});\mathrm{B}_2(\mathrm{h}+b,\ \mathrm{k})$
- ដែល $a>b>0$ និង $c^2=a^2-b^2$

❖ អេលីបមានផ្ចិតត្រង់គល់ O

មានន័យថា $h=0$ និង $k=0$ គេបាន

- សមីការស្តង់ដា $\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1$
- ផ្ចិត $O(0\ ,\ 0)$
- កំពូល $V_1(0\ ,\ -a)$ និង $V_2(0\ ,\ a)$
- កំណុំ $F_1(0\ ,\ -c)$ និង $F_2(0\ ,\ c)$
- ចំណុចប្រសព្វអ័ក្សតូច $B_1(-\mathrm{b},\ 0);\mathrm{B}_2(\mathrm{b},\ 0)$
- ដែល $a>b>0$ និង $c^2=a^2-b^2$

III. សមីការទូទៅនៃអេលីប

$$Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$$

ដែល $A\cdot B>0$ និង $A\neq 0\ ,\ B\neq 0$

IV. អ៊ិចសង់ទ្រីស៊ីតេ

អ៊ិចសង់ទ្រីស៊ីតេ e ជាផលធៀបរវាងចម្ងាយពីផ្ចិតទៅកំណុំនិងកន្លះអ័ក្សធំនៃអេលីបគឺ $e=c/a$ ។

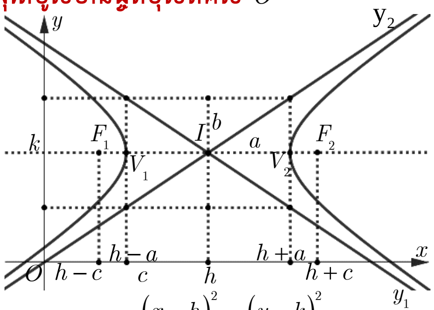
រូបមន្តគណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី ១២

កោនិច - អ៊ីពែបូល

បង្រៀនដោយ៖ សេង សុភាសិត វិ.សម្ដេចឪ

I. អ៊ីពែបូលមានអ័ក្សទទឹងដេក

❖ អ៊ីពែបូលមានផ្ចិតខុសពីគល់ O



- សមីការស្តង់ដា $\dfrac{(x-h)^2}{a^2}-\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$
- ផ្ចិត $I(h\,,\,k)$
- កំពូល $V_1(h-a,k)$ និង $V_2(h+a,k)$
- កំណុំ $F_1(h-c,k)$ និង $F_2(h+c,k)$
- សមីការអាស៊ីមតូតទាំងពីរ

$$y_1=k-\frac{b}{a}(x-h) \text{ និង } y_2=k+\frac{b}{a}(x-h)$$

- ដែល $a>0\,,b>0$ និង $c^2=a^2+b^2$

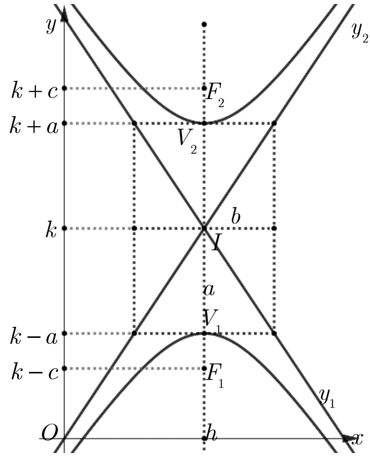
❖ អ៊ីពែបូលមានផ្ចិតត្រង់គល់ O

មានន័យថា $h=0$ និង $k=0$ គេបាន

- សមីការស្តង់ដា $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$
- មានផ្ចិត $O(0,0)$
- កំពូល $V_1(-a\,,0)$ និង $V_2(a\,,0)$
- កំណុំ $F_1(-c\,,0)$ និង $F_2(c\,,0)$
- សមីការអាស៊ីមតូតទាំងពីរ $y_1=-\dfrac{b}{a}x$ និង $y_2=\dfrac{b}{a}x$
- ដែល $a>0\,,b>0$ និង $c^2=a^2+b^2$

II. អ៊ីពែបូលដែលមានអ័ក្សទទឹងឈរ

❖ អ៊ីពែបូលដែលមានផ្ចិតខុសពីគល់ O



- សមីការស្តង់ដា $\dfrac{(y-k)^2}{a^2}-\dfrac{(x-h)^2}{b^2}=1$
- ផ្ចិត $I(h\,,\,k)$
- កំពូល $V_1(h,k-a)$ និង $V_2(h,k+a)$
- កំណុំ $F_1(h,k-c)$ និង $F_2(h,k+c)$
- សមីការអាស៊ីមតូតទាំងពីរ

$$y_1=k-\frac{a}{b}(x-h) \text{ និង } y_2=k+\frac{a}{b}(x-h)$$

- ដែល $a>0\,,b>0$ និង $c^2=a^2+b^2$

❖ អ៊ីពែបូលដែលមានផ្ចិតត្រង់គល់ O

មានន័យថា $h=0$ និង $k=0$ គេបាន

- សមីការស្តង់ដា $\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1$
- ផ្ចិត $O(0,0)$
- កំពូល $V_1(0\,,-a)$ និង $V_2(0\,,\,a)$
- កំណុំ $F_1(0\,,-c)$ និង $F_2(0\,,\,c)$
- សមីការអាស៊ីមតូតទាំងពីរ $y_1=-\dfrac{a}{b}x$ និង $y_2=\dfrac{a}{b}x$
- ដែល $a>0\,,b>0$ និង $c^2=a^2+b^2$

III. សមីការទូទៅនៃអ៊ីពែបូល

$$Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$$

ដែល $A\cdot B<0$ និង $A\neq 0\,,B\neq 0$

IV. អ៊ិចសង់ទ្រីស៊ីតេ $e=c/a$

រូបមន្តគណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី ១២

ពន្លាតកន្សោម និងដាក់ផលគុណកត្តា

បង្រៀនដោយ៖ សេង សុភាសិត វិ.សម្តេចឪ

❖ ដាក់កន្សោមជាផលគុណកត្តា

- $a^2 - 1 = (a-1)(a+1)$
- $a^3 - 1 = (a-1)(a^2+a+1)$
- $a^4 - 1 = (a-1)(a^3+a^2+a+1)$
- $a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1}+a^{n-2}+\cdots+a+1)$
- $1-a^2 = (1-a)(1+a)$
- $1-a^3 = (1-a)(1+a+a^2)$
- $1-a^4 = (1-a)(1+a+a^2+a^3)$
- $1-a^n = (1-a)(1+a+\cdots+a^{n-2}+a^{n-1})$
- $a^2-b^2 = (a-b)(a+b)$
- $a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$
- $a^4-b^4 = (a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)$
- $a^5-b^5 = (a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)$
- $a^n-b^n = (a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$
- $a^3+1 = (a+1)(a^2-a+1)$
- $a^5+1 = (a+1)(a^4-a^3+a^2-a+1)$
- $a^n+1 = (a+1)(a^{n-1}-a^{n-2}+\cdots+a-1)\ ;(n:ood)$
- $a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$
- $a^5+b^5 = (a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)$
- $a^n+b^n = (a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}-b^{n-1})\,;(n:odd)$

- $(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1) = a-1$
- $(\sqrt[3]{a}-1)(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a}+1) = a-1$
- $(\sqrt[4]{a}-1)(\sqrt[4]{a^3}+\sqrt[4]{a^2}+\sqrt[4]{a}+1) = a-1$
- $(\sqrt[n]{a}-1)(\sqrt[n]{a^{n-1}}+\sqrt[n]{a^{n-2}}+\cdots+\sqrt[n]{a}+1) = a-1$
- $(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b}) = a-b$
- $(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b^2}) = a-b$
- $(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b})(\sqrt[4]{a^3}+\sqrt[4]{a^2}\sqrt[4]{b}+\sqrt[4]{a}\sqrt[4]{b^2}+\sqrt[4]{b^3}) = a-b$
- $(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b})(\sqrt[n]{a^{n-1}}+\sqrt[n]{a^{n-2}}\sqrt[n]{b}+\cdots+\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b^{n-2}}+\sqrt[n]{b^{n-1}}) = a-b$

❖ ពន្លាតកន្សោម

- $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$
- $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
- $(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$
- $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$
- $(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$
- $(a-b)^4 = a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4$
- $(a-b)(a+b) = a^2-b^2$
- $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3$
- $(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3+b^3$
- $(a+b)^n = C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\cdots+C_n^{n-1}ab^{n-1}+C_n^nb^n$
- $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$

❖ ផ្សេងៗ

- $a^2+b^2 = (a+b)^2-2ab$
- $a^4+b^4 = (a^2+b^2)^2-2a^2b^2$
- $a^6+b^6 = (a^3+b^3)^2-2a^3b^3$